【11. 特殊な関数】

この項ではデルタ関数、ガンマ関数、ツェータ関数について説明する。
これらの関数は特殊関数ではない。特殊な関数の形をしてはいるがそれ自身が微分方程式の特殊解ではないので区別した扱いをとる。またこれらは様々な部分で顔を出すので例題は必要ないと思われる。もちろん使い方は示す。

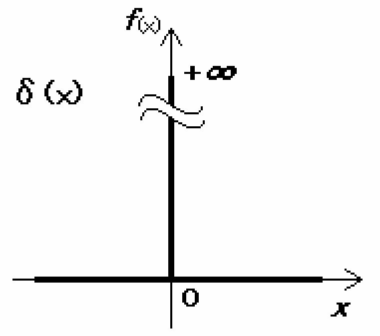
・ δ(デルタ)関数

デルタ関数は物理のあらゆる場所で扱われる基本的な関数である。基本的に扱われるが、その性質は他の関数とは異なり、作用する関数といった方がいいのかもしれない。まずはどのような関数なのかみて見るとしよう。

・ デルタ関数の定義

デルタ関数は次のように定義された関数である。

$$\delta(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & (\mathrm{x} \neq 0) \\ \infty & (\mathrm{x} = 0) \end{cases}$$



デルタ関数は右図のような描像をしている。
$\mathrm{x} = 0$ のとき ∞ となり、他の領域 $\mathrm{x} \neq 0$ では
$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \delta(\mathrm{x} \neq 0) = 0$ となっている。

この関数はどんな物理現象を記述するのかと言えば、点電荷など、ある点にその物理量が存在するようなものを記述するのに使えそうである。しかしデルタ関数の意味は積分をして初めて意味を成すと言える。
デルタ関数の積分は次のように定義される。
デルタ関数の積分は右のような結果を与える。
$\mathrm{x} = 0$ となる x が考えている領域[a,b]に含まれていれば値を持ち、含まれていないときその値はない。

$$\int_a^b \mathrm{dx}\,\delta(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathrm{x} = 0) \in [\mathrm{a},\mathrm{b}] \\ 0 & (\mathrm{x} = 0) \notin [\mathrm{a},\mathrm{b}] \end{cases}$$

考える領域でその物理量が存在する、しないを表す時、大きな役割を担う。例えば、

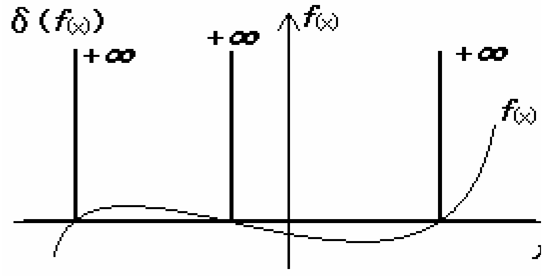
$$\int_0^\infty \mathrm{dx}\,\delta(\mathrm{x}-1)\,\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(1)$$

である。

これは $\mathrm{x} = 1$ の時のみ何らかの物理量 $\mathrm{g}(\mathrm{x})$ が存在していることを、意味している。

今までδ関数の引数(上で言う x)が単純にそのものであった。引数が関数である事も当然、考えられる。δ関数の引数が関数であるときは、

$$\delta\big(f(x)\big)=\begin{cases}0 & \big(f(x)\neq 0\big)\\ \infty & \big(f(x)=0\big)\end{cases}$$



もちろん $f(x)=0$ となる x において∞となる。

しかし、引数が関数のままでは扱いにくい。もっと扱いやすく $\delta(x-a)$ の形で表現する事を考えよう。この形で書けば即座に a においてδ関数の効果があることがわかるからである。

・ δ関数の簡素化

先ず最も簡単な場合を考えよう。

$f(x)=cx$ の時、積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(cx)g(x)$$ を計算する。 $y\equiv cx$ とおいて書き換えれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(cx)g(x)=\frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{\infty} dy\delta(y)g(y)=\frac{g(0)}{|c|}$$ となる。

つまりδ関数は右のように書き換えられる。 $\delta(cx)=\dfrac{\delta(x)}{|c|}$

次に一般にδ関数の引数が $f(x)$ の場合を考えよう。

$f(x)$ の解が一般的に n 個存在するので各々の解を a_i と書くとする。ある解の周りで Taylor 展開を行うと、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a_i)+f'(a_i)(x-a_i)+\frac{1}{2!}f''(a_i)(x-a_i)^2+\cdots \qquad \because f(a_i)=0 \\ &\approx f'(a_i)(x-a_i) \end{aligned}$$

δ関数の引数として考えているので x は a_i に相当近いハズであるから $(x-a_i)$ の一次の項を採用する。よってδ関数の引数の部分は $f'(a)$ の定数がかけられた $(x-a_i)$ で表現できる。これは、先に示していた形になっている。また n 個の解 a_i にδ関数が考えられるから

$$\delta\big(f(x)\big)=\sum_i^n \frac{\delta(x-a_i)}{\left.\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=a_i}}$$ と書くことができる。例を見てみよう。

例 1、次のデルタ関数を簡素化せよ。

（1） $\delta\left(e^{x}-1\right)$　　（2） $\delta(\sin x)$

(解)

（1） $\delta\left(e^{x}-1\right)=\dfrac{\delta(x-0)}{\left.e^{x}\right|_{x=0}}=\delta(x)$

（2） $\delta(\sin x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\delta(x-n\pi)}{\left.(-1)^{n}\cos x\right|_{x=n\pi}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\pi)$

とにかく引数がゼロとなる解を見つけ、引数の微分に解を代入したもので割ればよい。

例 2、次の関数を表せ。

$$f(y)=\int_{0}^{\infty}dx\cdot x\exp[-x^{2}]\delta\left(x^{2}-y^{2}\right)\qquad(y>0)$$

(解)

$\delta\left(x^{2}-y^{2}\right)=\dfrac{\delta(x-y)}{2y}+\dfrac{\delta(x+y)}{-2y}$　より

$$f(y)=\int_{0}^{\infty}dx\cdot x\exp[-x^{2}]\delta\left(x^{2}-y^{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2y}\int_{0}^{\infty}dx\cdot x\exp[-x]\delta(x-y)-\frac{1}{2y}\int_{0}^{\infty}dx\cdot x\exp[-x]\delta(x+y)$$

$=\dfrac{1}{2y}y\exp[-y]=\dfrac{\exp[-y]}{2}$　　　となる。

$\delta(x+y)$ の項は考える範囲には無いところであるからゼロである。

次にδ関数の次元について考えてみよう。

・δ関数の次元

物理で扱う関数は常に次元を確認せねばならない。δ関数も例外ではなくこの特殊な作用をもつ関数の次元も明らかにしなければならない。

すでに気付いてるかもしれないが、次の積分の次元を考えてみよう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) = 1 \quad \rightarrow \quad \text{無次元}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) f(x) = f(0) \quad \rightarrow \quad f(x)\text{と同次元}$$

普通、関数を積分すると積分した引数の次元が一つ上がるが結果はそうではない。

これらの結果よりδ関数は引数と逆次元を持つと考えられる。よく知る例を見てみよう。

例 3、次の積分を計算せよ

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\delta\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\delta\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - a\right)$

(解)

(1)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{とおくと}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\delta\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right) = \int_{0}^{\infty} dr \int_{0}^{2\pi} d\theta r\delta(r - a) = 2\pi a \quad [m]$$

(2)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases} \quad \text{とおくと}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\delta\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - a\right) = \int_{0}^{\infty} dr \int_{0}^{\pi} d\theta \int_{0}^{2\pi} d\phi r^2 \sin\theta\delta(r - a) = 4\pi a^2 \quad [m^2]$$

(1)は半径 a の円の周囲である。二階の積分だが次元は[m]

(2)の半径 a の球体の表面積である。三階の積分だが次元は$[m^2]$である。

次にδ関数の様々な表現について見てみよう。

・δ関数の別表現
δ関数がいつも先に示した時のような形で現われているわけではない。むしろ関数を設定するときに扱う側が書く表現である。時折、物理現象を示す関数の中でδ関数の別表現が現われることがある。近似としてδ関数のように扱いを考えることもある。そうする事で物理現象が想像しやすくなる。

(1)Gauss 分布(正規分布)の極限
実験値の最確値を考える際に Gauss 分布という分布を利用する事があると思う。
その極限としてδ関数が表される。
Gauss 分布は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] \qquad \mu \text{：平均値} \qquad \sigma^2 \text{：分散}$$

で定義されるものである。
分布関数は確率密度関数であるから定義されている領域で積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 1 \quad \cdots (i)$$

を満たす。δ関数の積分性質と同様の結果を持つ。積分していないときの性質はどうか？
今 $\mu = 0$ ($x = 0$ での話)で σ を無限大にすることを考えると

$$\lim_{\sigma \to \infty} f(x) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] \to 0 \quad \cdots (ii)$$

となる。これは $x \neq 0$ では至る所でゼロであるということを意味している。
$x = 0$ ではどうなっているのかと考えるが、(i)と(ii)を満たす関数はδ関数でしかない。
よって

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right]$$

と表現が可能である、と言える。

よく言われる極限結果であるがこの表現は厳密性にかけるので注意して扱う必要がある。

次にフーリエ積分による表現を見てみよう。

(2)フーリエ変換による表現

フーリエ変換を用いてδ関数を表現することを考える。

まずフーリエ変換を

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[ixk] F(k) \\ F(k) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-ixk] f(x) \end{cases}$$

とする。

ここで $f(x) \equiv \delta(x)$ と定義してやる。 $f(x)$ のフーリエ変換は

$$F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-ixk] f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-ixk]\delta(x) = \frac{1}{2\pi}$$

よってこれをフーリエ逆変換してやると、

$$f(x) \equiv \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[ixk] F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[ixk]$$

と表現されるがδ関数の性質を持っているか確かめるため、さらに極限計算を考えると

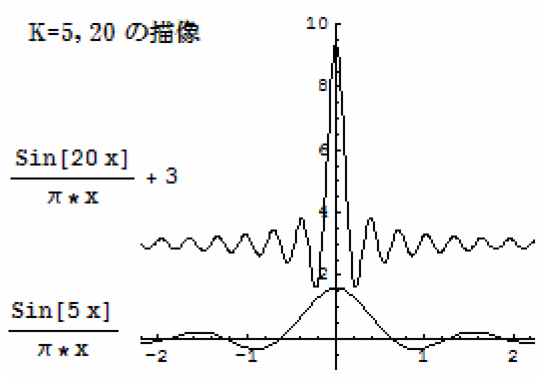
$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[ixk] = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}\left[\exp[ixk]\right]_{-K}^{K} = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix} 2i \sin[Kx] = \lim_{K\to\infty}\frac{\sin[Kx]}{\pi x}$$

$x = 0$ の時、確かに $\delta(x) = \infty$ となる。

少しこの表示のときの描像を見てみよう。

右図が $K = 5, 20$ のときを書いてみた。

K が大きくなると段々と $\delta(x)$ のようになっていくのがわかる。



積分をしたときはどうであろうか。極限計算と積分が交換できるとして

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = \lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin[Kx]}{\pi x} = \lim_{K\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} dy \frac{\sin[y]}{y} = 1$$

但し $y \equiv Kx$ と置いた。

図を見ると偶関数の描像であるから積分範囲を変えることが出来るとした。

(3)ステップ関数の微分による表現。
統計力学でフェルミ分布関数というものが現われる。絶対温度ゼロにおけるフェルミ分布はステップ関数になる。そのような場所で扱われるのがこの表現である。

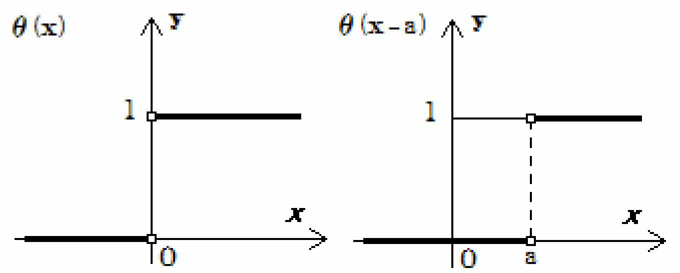
階段関数(Step Function)は次のように定義される関数である。

$$\theta(\mathrm{x})=\begin{cases}1 & (\mathrm{x}\geq 0)\\ 0 & (\mathrm{x}<0)\end{cases}$$

と表され右図のようになる。
また引数を変えて

$$\theta(\mathrm{x}-\mathrm{a})=\begin{cases}1 & (\mathrm{x}\geq \mathrm{a})\\ 0 & (\mathrm{x}<\mathrm{a})\end{cases}$$

と位置をずらすことも出来る。



この不連続点での微分がδ関数として与えられる。

$$\frac{\mathrm{d}\theta(\mathrm{x}-\mathrm{a})}{\mathrm{dx}}=\delta(\mathrm{x}-\mathrm{a})$$

不連続点 $\mathrm{x}=\mathrm{a}$ における微分は本来、定義出来ない事になっているが、もし微分したらこの点において $+\infty$ の傾きを持つことになる。また $\mathrm{x}\neq\mathrm{a}$ の部分ではゼロである。
この性質はδ関数の性質である。さらに表現は積分すると階段関数になるので積分の結果もδ関数の性質を示している。

さて以上三つの表現を示したが、他にも表現方法はある。δ関数の性質を知っていれば、見た関数がδ関数と同様に扱えるかどうかはわかると思う。
このδ関数は Dirac によって作られた関数で Dirac のδ関数と呼ばれている。先述にもあるがこの関数は普通の関数ではない。演算子の扱いであるδ関数は超関数(distribution)と呼ばれている。超関数はそれ一つで分野があるので詳しくは触れない。

最後にもう一度、デルタ関数の使い方としてδ関数自身の性質より条件に合う唯一の座標を示す事が、大体の場合である。気を付ける事は近似的にδ関数と見る時である。

・Γ(ガンマ)関数

例題として統計力学で現れる n 次元超球殻の表現について考えてみよう。またガンマ関数自身の性質についても調べてみる。

・ n 次元超球殻の表現

n 次元位相空間で、あるエネルギー幅の中に幾つの状態があるのか考える際に n 次元球体の殻をエネルギー幅と考える事がある。そうすると n 次元超球の表面積を考える必要がある。

今、半径 r の超球の体積が $V = C_n r^n$ **として表されるので、表面積はこれを r で微分し**

$$S_n(r) = nC_n r^{n-1} \equiv a_n r^{n-1}$$

で表される。

突然だが、次の積分を二通りで表す。

変数変換をする際に S_n **が現われてくる所が狙いである。**

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n} dx_j \exp\left[-a\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right]$$

まず n 次元位相空間での半径は $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ **の関係にあることから**

$$I_n = \int_0^{\infty} dr \cdot e^{-ar^2} S_n(r) = a_n \int_0^{\infty} dr \cdot e^{-ar^2} r^{n-1} = \frac{a_n}{2}\int_0^{\infty} dt \cdot e^{-at} t^{\left(n/2 - 1\right)} \qquad (r^2 = t \text{ とした})$$

この最後の積分部分が Γ 関数と定義され、 exp **の肩の** $a = 1$ **として**

$$\Gamma\left(n/2\right) \equiv \int_0^{\infty} dt \cdot e^{-t} t^{\left(n/2 - 1\right)}$$

と表される。

Γ 関数の形が出てきたが、このまま n 次元超球殻の表面積を求めてしまおう。

さらにこの積分は次のようにも考えられる。($a = 1$ **とした)**

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n} dx_j \exp\left[-\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left[-\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\right]$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-x^2]\right\}^n = \left(\sqrt{\pi}\right)^n = \pi^{n/2}$$

と Gausian の n 乗で与えられる。

よって

$$I_n = \frac{a_n}{2}\int_0^\infty dt\cdot e^{-at}t^{\left(n/2-1\right)} = \frac{a_n}{2}\Gamma\left(n/2\right) = \pi^{n/2} \quad\rightarrow\quad a_n = \frac{2\cdot\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2\right)} \qquad \therefore\ S_n = \frac{2\cdot\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2\right)}r^{n-1}$$

となるのである。n次元超球殻はこれくらいにしておいてΓ関数の性質をみて見よう。

・　Γ関数の性質

Γ関数は引数の階乗の形で表すことが出来る。それについて証明してみる。

Γ関数の定義より

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty dt\cdot e^{-t}t^{(x-1)}$$

これを部分積分してやると

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\cdot e^{-t}t^{x-1} = \left[-e^{-t}t^{x-1}\right]_0^\infty + (x-1)\int_0^\infty dt\cdot e^{-t}t^{x-2}$$

$$= (x-1)\Gamma(x-1)$$

となる。これを続けていくと

$\Gamma(x+1) = x(x-1)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = x!\Gamma(1)$　　である。$\Gamma(1)$は計算できて、

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty dt\cdot e^{-t} = 1$$

よって

$\Gamma(x+1) = x\,!$と階乗で表すことが出来る。

統計力学ではStringの公式と併用することがある。Stringの公式は大数の階乗を簡単な形で書くことが出来る。String の公式は様々な形があるので補足に書いておくことにする。是非みていただきたい。

もう少しΓ関数について触れておこう。今、引数xについて正の場合しか述べていない。負の場合があるのかを考えてみよう。

先に示した関係

$\dfrac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(x)$　が成立する。ここで$x = -0.5$と負の値を入れてみると

$$\Gamma(-0.5) = -\frac{\Gamma(-0.5+1)}{0.5} = -2\Gamma(0.5)$$

となり、負の値でもΓ関数は定義できるのである。

さて先の結果を利用するとさらに大きい負の数でも値を考えることが出来て

$$\Gamma(-1.5) = -\frac{\Gamma(-1.5+1)}{1.5} = -\frac{2}{3}\Gamma(-0.5) = \frac{4}{3}\Gamma(0.5)$$

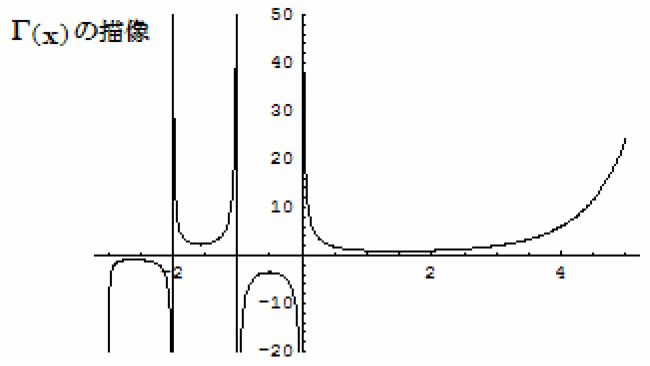
と表すことが出来る。

さて $x = -1$ については外していた。それは $\Gamma(0)$ が発散するためである。確かめてみると

$$\lim_{x\to 0}\Gamma(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)}{x} \to \infty$$

$\Gamma(1)$ は有限の値を持つので発散してしまうことがわかる。Γ関数の描像を書いてみると。

注目は負の部分での整数 $-n$ で発散しているところである。



以上がΓ関数の大体の性質である。

結局、Γ関数は定数のように扱われることがわかっていただけたと思う。

ガンマ関数と名前が付いている複雑な関数だが、扱い方がわかればまったく怖くない関数と意識できるとであろう。

・ζ(ツェータ)関数

ツェータ関数は深く突っ込むと、応用例としては非常に難しい。ここでは数値的な扱いが出来る場合のものを説明するに留める。量子力学で現われる際に量子数が関わってくるので重要である。ここでは統計力学の例からツェータ関数の出現を見てみよう。

・Bose－Einstein 凝縮(BoseEinsteinCondensation 以下 BEC と略記)

理想 Bose－Einstein 気体の低温で見せる現象に BEC がある。BEC は Bose 統計に従ずる粒子の集団すなわち Bose 粒子がある温度で突然、全粒子数に匹敵する数の粒子が最低エネルギー準位に落ち込むという現象である。BEC の記述については当然この粒子の分布関数が関与する。と言う事で Bose 粒子の分布関数を見ていこう。

Bose 粒子の分布関数は

$$b(\varepsilon)=\frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon-\mu)]-1}$$ ε：一粒子のエネルギー　μ：化学 Potential

この化学 Potential が大きく BEC に影響する。μ は粒子数と温度の関数である。

先述のような状態として $\varepsilon=0$ においてこの分布関数が正である事であるから

$$b(0)=\frac{1}{\exp[-\beta\mu]-1}>0 \quad \cdots(\mathrm{i})$$ より　$\mu<0$ の値を持つ

さて全粒子数 N がどのようになっているか調べてみると(今、3次元で考えている)

$$N=\int_0^\infty d\varepsilon\cdot\rho(\varepsilon)b(\varepsilon)=\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty d\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp[\beta(\varepsilon-\mu)]-1}$$

$\rho(\varepsilon)$：状態密度 DoS(Density of State)　$$\rho(\varepsilon)\equiv\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\equiv A\sqrt{\varepsilon}$$

となるがこのまま計算すると $\varepsilon=0$ において粒子数は 0 であると評価されてしまう。

そこで $\varepsilon=0$ での粒子数を別にして考えてやると、

$$N=\int_0^\infty d\varepsilon\cdot\rho(\varepsilon)b(\varepsilon)=\frac{1}{\exp[-\beta\mu]-1}+\lim_{\Delta\to0}A\int_\Delta^\infty d\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp[\beta(\varepsilon-\mu)]-1}$$

$$\equiv N_0+N_\varepsilon$$ N_0：基底状態の粒子数

N_ε：励起状態の粒子数

と書くことができる。基底状態は一つなので状態密度は当然 1 である。

基底状態の粒子数 N_0 の表記より μ はもう少し制限されて、$T=0$ 以外で $\mu=0$ とならない。

なぜなら $T\neq0$ で $\mu=0$ となるといたるところで $N_0=\infty$ となる。これはおかしい。

ここで $\mu=0$ となるような $T=T_C$ を考えてみることにしよう。

(i)が成立すると仮定すると $\mu \to 0$ での粒子数を見てやると

$$N = A\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp[\beta_C \varepsilon]-1} \qquad \beta_C \varepsilon \equiv z \quad \text{とすると} \qquad \beta_C \equiv \frac{1}{k_B T_C}$$

$$N = A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty dz \frac{\sqrt{z}}{\exp[z]-1}$$

$$= A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty dz\sqrt{z}\frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} = A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty dz\sqrt{z}e^{-z}(1+e^{-z}+e^{-2z}+\cdots)$$

$$= A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dz\sqrt{z}e^{-nz} \quad \text{となる。} \qquad \frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^\infty r^n \quad |r|<1 \text{を利用している。}$$

こいつをさらに変数変換 $nz \equiv x$ してやると

$$N = A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dz\sqrt{z}e^{-nz} = A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \int_0^\infty dz\sqrt{x}e^{-x} \quad \text{となる。ここで}$$

$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ とツェータ関数を定義するとこの右辺はζ関数とΓ関数で表すことができ、

$$N = A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \int_0^\infty dz\sqrt{x}e^{-x}$$

$$= A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \zeta\left(3/2\right) \int_0^\infty dx\cdot x^{1/2}e^{-x} = A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \zeta\left(3/2\right) \int_0^\infty dx\cdot x^{3/2-1}e^{-x} = A\cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \zeta\left(3/2\right)\cdot \Gamma\left(3/2\right)$$

と書けてしまう。

さて長々と BEC について述べてきたがようやくツェータ関数が現われた。
ここで BEC については一先ず置いておいて、先に述べていたΓ関数の様に値を取る関数になることを説明していくことにする。

・ツェータ関数の収束

ツェータ関数が定数のように扱えるというにはこの関数が収束しなければならない。

定義式よりそれを示そう。

ζ関数は

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

この級数が収束すればよいので項比を調べると、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s} \to 1-\frac{s}{n}+\cdots$$

n**が十分大きいとき項比は** 1 **となりよくわからないことになる。**

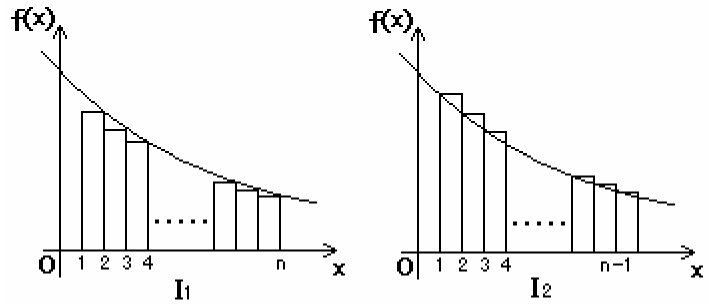
すなわち、項比判定法では判断できない。積分判定法というものを利用しよう。

《積分判定法とは？》

正項級数和S_n**が一般項**a_n**が関数** $f(n)$ **と書け、**n **に対し減少するものとする。**

この部分和S_n **を積分で表すことを考える。しかし、上のように定義したためこの積分には階段のような画になる。**

この積分を右図のような場合を考えて近似することを考える。



$$I = \int_1^n dx f(x) \approx \frac{I_1+I_2}{2} = \frac{1}{2}\left\{2f(2)+2f(3)+\cdots+2f(n-1)\right\}+\frac{1}{2}\left\{f(1)+f(n)\right\}$$

となり、二項目は

$$S_n = \frac{1}{2}\left\{2f(1)+f(2)+\cdots+2f(n)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2f(2)+2f(3)+\cdots+2f(n-1)\right\}+f(1)+f(n)$$ **より**

$$\int_1^n dx f(x) \approx S_n - \frac{1}{2}\left\{f(1)+f(n)\right\} \to S_n \approx \int_1^n dx f(x) + \frac{1}{2}\left\{f(1)+f(n)\right\}$$ **となるから**

$n \to \infty$ **にて**$\int_1^n dx f(x)$ **が収束すればこの部分和は収束する。　これをζ関数に適用しよう。**

再び、

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

より $a_n = f(n) = \frac{1}{n^s} \equiv \frac{1}{x^s}$ とすると積分判定法より

$$\int_1^{\infty} dx f(x) = \int_1^{\infty} dx \frac{1}{x^s} = \int_1^{\infty} dx \cdot x^{-s}$$ を計算すればよい。

となると収束する s の値が限定されてくる。$s > 1$ のとき収束し $0 \leq s < 1$ のとき発散する。
故にζ関数を定数と扱えるのは $s > 1$ のときである。
さてζ関数の振る舞いが大体わかったところで BEC の問題に戻る。

・再び BEC へ
粒子数は

$$N = A \cdot \beta_C^{-\frac{3}{2}} \zeta\left(3/2\right) \cdot \Gamma\left(3/2\right)$$

と書けた。ζ関数の中身は $s > 1$ を満たしているので収束した値となる。
求めたいのは臨界温度 T_C であるから

$$\beta_C^{\frac{3}{2}} = \left(T_C k_B\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{A}{N} \zeta\left(3/2\right) \Gamma\left(3/2\right)$$

と表せば、その時の Bose 粒子の濃度がわかれば臨界温度 T_C は決定できる。

ここまでが数値的な扱いの出来るζ関数である。ζ関数は整数で構成されている関数であるためその振る舞いは離散的なものに現われてくるであろう事は予測される。
しかしながら整数であるから「簡単」ではない。むしろ困難であることがわかるであろう。例えば「素数」である。これを正確に扱うには相当頭をひねらねばならないだろう。実は素数とζ関数は無関係ではないのである。ζ関数の Euler 積表示というものがある。
【ζ関数の Euler 積表示】

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{-1}{1 - p^{-s}}$$ p ；全ての素数

と表現される。これはもう数学の領域に足を突っ込んでいる、物理から離れていると思うかもしれない。実は量子力学でこの関係が扱われることがあるという。もちろんそこには触れない。が、これらの特殊な関数を完全には侮ってはいけないという事である。また自分たちの知らない側面が実はあるのだということをしておいて欲しい。

以上ツェータ関数の説明である。