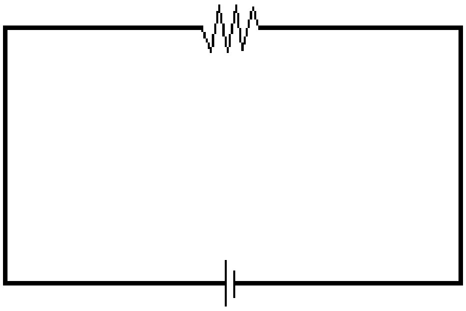
回路のノート

1. R 回路

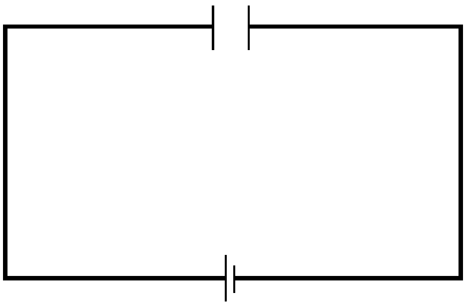


電流 $I(t)$ を求めよ。

回路の方程式

$$
\begin{aligned}
RI &= V \\
I &= \frac{V}{R}
\end{aligned}
$$

2. C 回路



電流 $I(t)$ を求めよ。

回路の方程式

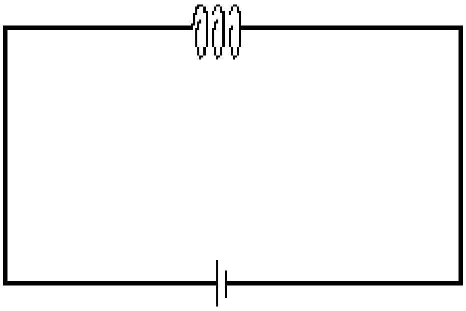
$$\frac{q}{c} = V$$

$$q = CV$$

よって

$$I = \frac{dq}{dt} = 0$$

3. L 回路



電流 $I(t)$ を求めよ。

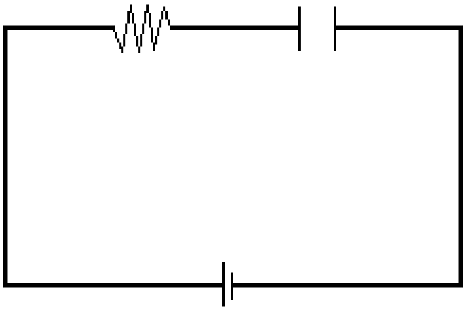
回路の方程式

$$
\begin{aligned}
L\frac{dI}{dt} &= V \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L} \\
I &= \frac{V}{L}t + A
\end{aligned}
$$

初期条件 $(I(0) = 0)$ を考慮すると $A = 0$ となるから

$$
I = \frac{V}{L}t
$$

4. RC 回路



電流 $I(t)$ を求めよ。

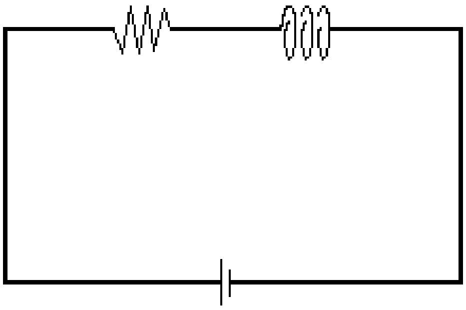
回路の方程式

$$
\begin{aligned}
RI + \frac{q}{C} &= V \\
R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} &= V \\
R\frac{dq}{dt} &= -\frac{q}{C} + V \\
R\frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{C}\left(q - CV\right) \\
\frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{RC}\left(q - CV\right) \\
\frac{d}{dt}\left(q - CV\right) &= -\frac{1}{RC}\left(q - CV\right) \\
q - CV &= Ae^{-\frac{1}{RC}t} \\
q &= CV + Ae^{-\frac{1}{RC}t}
\end{aligned}
$$

初期条件 $(q(0) = 0)$ を考慮すると $A = -CV$ となるから

$$
\begin{aligned}
q &= CV\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \\
I &= \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}
\end{aligned}
$$

5. RL 回路



電流 $I(t)$ を求めよ。

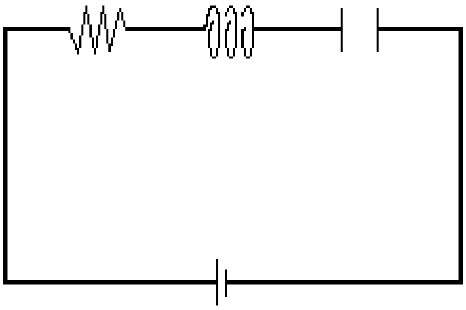
回路の方程式

$$
\begin{aligned}
RI + L\frac{dI}{dt} &= V \\
L\frac{dI}{dt} &= -RI + V \\
L\frac{dI}{dt} &= -R\left(I - \frac{V}{R}\right) \\
\frac{dI}{dt} &= -\frac{R}{L}\left(I - \frac{V}{R}\right) \\
\frac{d}{dt}\left(I - \frac{V}{R}\right) &= -\frac{R}{L}\left(I - \frac{V}{R}\right) \\
I - \frac{V}{R} &= Ae^{-\frac{R}{L}t} \\
I &= \frac{V}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}
$$

初期条件 $(I(0) = 0)$ を考慮すると $A = -\frac{V}{R}$ となるから

$$
I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)
$$

6. RLC 回路



電流 $I(t)$ を求めよ。

回路の方程式

$$\begin{aligned} V &= \frac{q(t)}{C} + RI(t) - LdI(t)dt \\ V &= \frac{1}{C}q(t) + R\dot{q}(t) + L\ddot{q}(t) \end{aligned}$$

この微分方程式は高校生の知識では解けないが、演繹的な方法での説明なら理解できるはずである。
1 階微分や 2 階微分で自身が出てくるのは $e^x, \sin(x)$ であるが、恐らくその積 $e^x \sin(x)$ も数回の微分で自身が出てくるはずである。確かめてみよう。

$$x(t) = Ae^{\lambda t}\cos(kt+\phi)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\lambda e^{\lambda t}\cos(kt+\phi) - Ake^{\lambda t}\sin(kt+\phi) \\ &= \lambda x(t) - Ake^{\lambda t}\sin(kt+\phi) \end{aligned}$$

$$Ae^{\lambda t}\sin(kt+\phi) = -\frac{1}{k}\left(\dot{x}(t) - \lambda x(t)\right)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \lambda\dot{x}(t) - Ak\left(\lambda e^{\lambda t}\sin(kt+\phi) + ke^{\lambda t}\cos(kt+\phi)\right) \\ &= \lambda\dot{x}(t) - k\lambda Ae^{\lambda t}\sin(kt+\phi) - k^2Ae^{\lambda t}\cos(kt+\phi) \\ &= \lambda\dot{x}(t) - k\lambda\left(-\frac{1}{k}\left(\dot{x}(t) - \lambda x(t)\right)\right) - k^2x(t) \\ &= 2\lambda\dot{x}(t) - (k^2+\lambda^2)x(t) \end{aligned}$$

RLC 回路の方程式 (電池 OFF) は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{q(t)}{C} + RI(t) - LdI(t)dt \\ 0 &= \frac{1}{C}q(t) + R\dot{q}(t) + L\ddot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) &= -\frac{R}{L}\dot{q}(t) - \frac{1}{LC}q(t) \end{aligned}$$

先ほどの結果と見比べると

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= -\frac{R}{L}\dot{q}(t) - \frac{1}{LC}q(t) \\ \\ \ddot{x}(t) &= 2\lambda\dot{x}(t) - (k^2+\lambda^2)x(t) \qquad \text{の時} \quad x(t) = Ae^{\lambda t}\cos(kt+\phi) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{R}{2L} \\ k &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \end{aligned}$$

以上より電池の入った RLC 回路では

$$\begin{aligned} q(t) &= Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t + \phi\right) \\ I(t) &= A\left[-\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t + \phi\right) - \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t + \phi\right)\right] \end{aligned}$$

これを踏まえると、微分方程式

$$\begin{aligned} V &= \frac{q(t)}{C} + RI(t) - LdI(t)dt \\ V &= \frac{1}{C}q(t) + R\dot{q}(t) + L\ddot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) &= -\frac{R}{L}\dot{q}(t) - \frac{1}{LC}q(t) + V \end{aligned}$$

を満たす解は

$$
\begin{aligned}
q(t) &= Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}t+\phi\right)+VLC \\
I(t) &= A\left[-\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}t+\phi\right)-\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}t+\phi\right)\right]
\end{aligned}
$$

さらにこの結果を踏まえると、微分方程式

$$
\begin{aligned}
V\cos\omega t &= \frac{q(t)}{C}+RI(t)-LdI(t)dt \\
V\cos\omega t &= \frac{1}{C}q(t)+R\dot{q}(t)+L\ddot{q}(t) \\
\ddot{q}(t) &= -\frac{R}{L}\dot{q}(t)-\frac{1}{LC}q(t)+V\cos\omega t
\end{aligned}
$$

を満たす解は

$$
\begin{aligned}
q(t) &= Ae^{\lambda t}\cos(kt+\phi)+Be^{\lambda_2 t}\cos(k_2t+\phi_2) \\
\ddot{q}(t) &= 2\lambda\dot{q}(t)-(k^2+\lambda^2)q(t)+2\lambda_2\dot{q}(t)-(k_2^2+\lambda_2^2)q(t)
\end{aligned}
$$

ここで

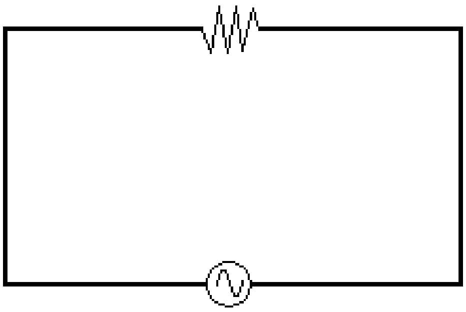
$$2\lambda_2\dot{q}(t)-(k_2^2+\lambda_2^2)q(t)$$

これが

$$V\cos\omega t$$

になれば良い。それは $k_2=\omega,\phi_2=0$ で満たされる。

7. 交流 R 回路

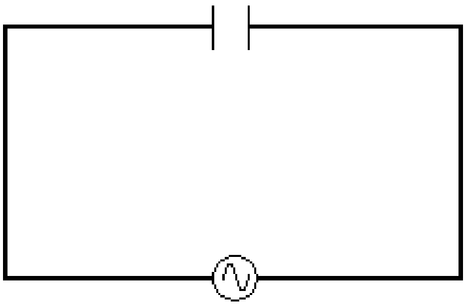


電流 $I(t)$ を求めよ。

回路の方程式

$$
\begin{aligned}
RI &= V \sin \omega t \\
I &= \frac{V}{R} \sin \omega t
\end{aligned}
$$

8. 交流 C 回路



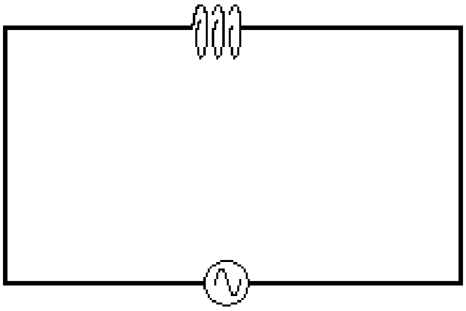
電流 $I(t)$ を求めよ。

回路の方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{q}{c} &= V \sin \omega t \\
q &= CV \sin \omega t \\
\\
I &= \omega CV \cos \omega t \\
I &= \omega CV \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

よって電流の位相は交流電源の位相より $\frac{\pi}{2}$ 進んでいると分かる。また、$V = \frac{1}{\omega C} I$ と書けるので、容量が ωC のコンデンサーが繋いである回路として見ることも出来る。この ωC は容量リアクタンスと呼ばれる。

9. 交流 L 回路



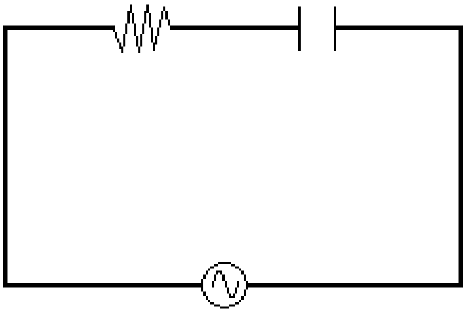
電流 $I(t)$ を求めよ。

回路の方程式

$$
\begin{aligned}
L\frac{dI}{dt} &= V\sin\omega t \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L}\sin\omega t \\
I &= -\frac{V}{\omega L}\cos\omega t + A \\
I &= \frac{V}{\omega L}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

よって電流の位相は交流電源の位相より $\frac{\pi}{2}$ 遅れていると分かる。また、$V = \omega L I$ と書けるので、抵抗値が ωL の抵抗が繋いである回路として見ることも出来る。この ωL は誘導リアクタンスと呼ばれる。

10. 交流 RC 回路



電流 $I(t)$ を求めよ。

回路の方程式

$$\frac{q}{c}+RI = V\sin\omega t$$

$$\frac{q}{c}+\frac{dq}{dt} = CV\sin\omega t$$

これを推論的な方法で解いてみよう。交流電源を繋いで十分に時間がたったのなら、回路に流れる電流もまた同じ振動数で揺れているだろう（同じ関数形で書けるだろう）と予想する。つまり

$$I = I_0\sin\omega t$$

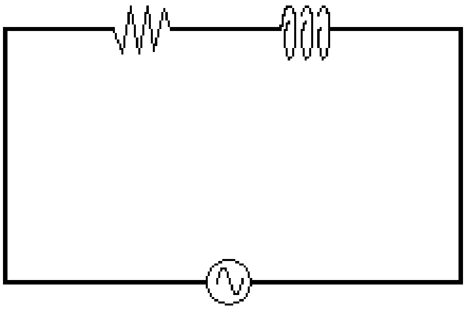
$$q = -\frac{I_0}{\omega}\cos\omega t$$

を仮定し、これを微分方程式に代入して I_0 を決定する。

$$\begin{aligned}
\frac{q}{c}+RI &= V\sin\omega t \\
\frac{1}{c}\left(-\frac{I_0}{\omega}\cos\omega t\right)+R\left(I_0\sin\omega t\right) &= V\sin\omega t \\
I_0\left(R\sin\omega t-\frac{1}{\omega C}\cos\omega t\right) &= V\sin\omega t \\
I_0\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\left(\sin\omega t\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}-\cos\omega t\frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\right) &= V\sin\omega t \\
I_0 Z\left(\sin\omega t\cos\phi-\cos\omega t\sin\phi\right) &= V\sin\omega t \\
I_0 Z\sin(\omega t-\phi) &= V\sin\omega t \\
I_0 &= \frac{V\sin\omega t}{Z\sin(\omega t-\phi)}
\end{aligned}$$

最後から一個手前の式は回路の方程式の形になっている。この時の抵抗 Z をインピーダンスと呼ぶ。回路に流れる電流の位相が、電源に対して進むか遅れるかは $tan\phi=1/\omega RC$ で決定される ϕ に依る。

11. 交流 RL 回路



電流 $I(t)$ を求めよ。

回路の方程式

$$L\frac{dI}{dt}+RI = V\sin\omega t$$

これも推論的な方法で解いてみよう。

$$I = I_0\sin\omega t$$

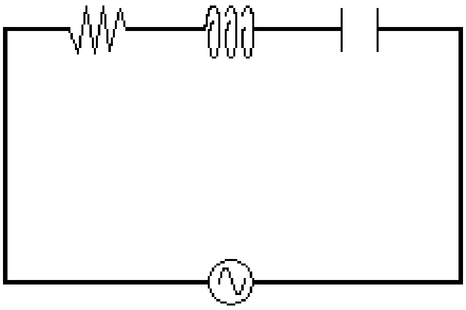
$$\dot{I} = I_0\omega\cos\omega t$$

を仮定し、これを微分方程式に代入して I_0 を決定する。

$$\begin{aligned}
L\frac{dI}{dt}+RI &= V\sin\omega t \\
L\left(I_0\omega\cos\omega t\right)+R\left(I_0\sin\omega t\right) &= V\sin\omega t \\
I_0\left(\omega L\cos\omega t+R\sin\omega t\right) &= V\sin\omega t \\
I_0\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\left(\sin\omega t\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}-\cos\omega t\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\right) &= V\sin\omega t \\
I_0Z\left(\sin\omega t\cos\phi-\cos\omega t\sin\phi\right) &= V\sin\omega t \\
I_0Z\sin(\omega t-\phi) &= V\sin\omega t \\
I_0 &= \frac{V\sin\omega t}{Z\sin(\omega t-\phi)}
\end{aligned}$$

最後から一個手前の式は回路の方程式の形になっている。この時の抵抗 Z をインピーダンスと呼ぶ。回路に流れる電流の位相が、電源に対して進むか遅れるかは $tan\phi=\omega L/R$ で決定される ϕ に依る。

12. 交流 RLC 回路



電流 $I(t)$ を求めよ。

回路の方程式

$$
\begin{aligned}
L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} + RI &= V\sin\omega t \\
L\ddot{q} + \frac{q}{C} + R\dot{q} &= V\sin\omega t
\end{aligned}
$$

これも推論的な方法で解いてみよう。

$$
I = I_0\sin\omega t \qquad \text{より} \qquad \begin{cases} q = -\frac{I_0}{\omega}cos\omega t \\ \dot{q} = I_0\sin\omega t \\ \ddot{q} = I_0\omega\cos\omega t \end{cases}
$$

を仮定し、これを微分方程式に代入して I_0 を決定する。

$$
\begin{aligned}
L\ddot{q} + \frac{q}{C} + R\dot{q} &= V\sin\omega t \\
L\left(I_0\omega\cos\omega t\right) + \frac{1}{C}\left(-\frac{I_0}{\omega}cos\omega t\right) + R\left(I_0\sin\omega t\right) &= V\sin\omega t \\
I_0\left(R\sin\omega t\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)cos\omega t\right) &= V\sin\omega t \\
I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin\omega t\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}cos\omega t\right) &= V\sin\omega t \\
I_0 Z\left(\sin\omega t\cos\phi + cos\omega t\sin\phi\right) &= V\sin\omega t \\
I_0 Z\sin(\omega t + \phi) &= V\sin\omega t \\
I_0 &= \frac{V\sin\omega t}{Z\sin(\omega t + \phi)}
\end{aligned}
$$

最後から一個手前の式は回路の方程式の形になっている。この時の抵抗 Z をインピーダンスと呼ぶ。回路に流れる電流の位相が、電源に対して進むか遅れるかは $tan\phi = (\omega L - \frac{1}{\omega C})/R$ で決定される ϕ に依る。

まとめ

名前	回路の方程式	解など
直流 R 回路	$V = RI$	電流 $I = \frac{V}{R}$
直流 C 回路	$V = \frac{q}{c}$	電流 $I = 0$
直流 L 回路	$V = L\frac{dI}{dt}$	電流 $I = \frac{V}{L}t$
直流 RC 回路	$V = RI + \frac{q}{C}$	電流 $I = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$
直流 RL 回路	$V = RI + L\frac{dI}{dt}$	電流 $I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$
直流 RLC 回路	$V = \frac{q}{C} + RI - L\frac{dI}{dt}$	電流 I=(長いので省略)
交流 R 回路	$V\sin\omega t = RI$	電流 $I = \frac{V}{R}\sin\omega t$ インピーダンス $Z = R$ 位相のズレ $\phi = 0$
交流 C 回路	$V\sin\omega t = \frac{q}{c}$	電流 $I = \omega CV\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ 容量リアクタンス $C' = frac1\omega C$ 位相のズレ $\phi = \frac{\pi}{2}$
交流 L 回路	$V\sin\omega t = L\frac{dI}{dt}$	電流 $I = \frac{V}{\omega L}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ 誘導リアクタンス $L' = \omega L$ 位相のズレ $\phi = \arctan -\frac{\pi}{2}$
交流 RC 回路	$V\sin\omega t = RI + \frac{q}{C}$	電流 $I = \frac{V\sin\omega t}{Z\sin(\omega t - \phi)}\sin\omega t$ インピーダンス $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ 位相のズレ $\phi = \arctan\frac{1}{\omega RC}$
交流 RL 回路	$V\sin\omega t = RI + L\frac{dI}{dt}$	電流 $I = \frac{V\sin\omega t}{Z\sin(\omega t - \phi)}\sin\omega t$ インピーダンス $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ 位相のズレ $\phi = \arctan\frac{\omega L}{R}$
交流 RLC 回路	$V\sin\omega t = \frac{q}{C} + RI - L\frac{dI}{dt}$	電流 $I = \frac{V\sin\omega t}{Z\sin(\omega t - \phi)}\sin\omega t$ インピーダンス $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ 位相のズレ $\phi = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

- コンデンサーは電流を吸い込むため位相が早くなり、コイルは電流を妨げるため位相が遅くなるというイメージ。
- 交流 RLC 回路ではインピーダンスが最小になるとき、最大の電流が流れる。つまり $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ の時。
- 今回、交流回路については解の関数形を仮定し、微分方程式を満たすようにその係数を決定した。しかし普通はそうそう解の形を思いつけるものではない。仮定を用いない方法には定数変化法、積分因子法、ラプラス変換による方法などがあるが、これは大学で学ぶことだろう。(数学を使う学科だったらね。)
- 殆どの微分方程式は手で解けず、旨く手計算で行ける形に変換（もしくは近似）するか、数値計算に頼るしかない。

Takashi Inoue
http://www.persianblue.net/