【６．複素積分】

この項では複素関数の積分、「複素積分」について述べる。特異点があるような関数の積分は実数空間だけでは限界がある。複素空間で考えれば「留数定理」や「Cauchy の主値積分」等の方法で求められるものがある。これらの方法と複素関数の解析に必要な基本的な知識を見ていくことにする。

・複素関数の積分

複素関数を扱う上で基本的な知識が必要で、幾つかの関係式を証明しておく。

・Cauchy－Riemann(コーシー・リーマン)の関係式
この関係式の意味は、複素関数が考える領域にて正則(微分可能)であるための条件である。
複素関数の微分について考えよう。
複素関数

$$f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y) \qquad z \equiv x + iy$$

とする。
微分の定義より $f(z)$ を z 平面にて微分することは

$$\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が収束することを意味する。
z は x, y の関数であるから x, y どちらの微分も等しくならなければならない。従って、
$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ を考慮して
(x について)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{―― ①}$$

(y について)

$$\lim_{i\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{―― ②}$$

①＝②とすると

$$\boxed{\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

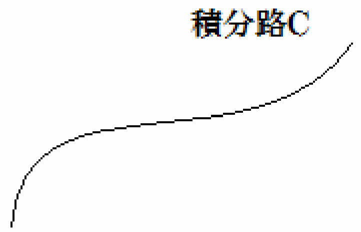
この関係を満たせば $f(z)$ は正則である。

この関係式を Cauchy－Riemann の関係式と言う。

・Cauchy の積分定理

この項では線積分と Stokes の定理の知識が必要である。(詳しくはベクトル解析を参照)

複素関数 $f(z)$ を積分路 C に沿って積分することを考える。



$$I_z = \int_C f(z)dz$$

$f(z)$ は

$$f(z) \equiv u(x,y) + iv(x,y) \qquad z \equiv x + iy$$

と書けることを考えると積分 I_z は

$$I_z = \int_C f(z)dz$$
$$= \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

である。

積分路 C が閉じていた場合を考えると積分 I_z は

$$I_z = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$

となるから、右図の様に積分路 C に囲まれた領域を S とし(※)Stokes の定理を用いれば、

$$I_z = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

複素関数 $f(z)$ が正則ならば Cauchy－Riemann の関係式より

$$\boxed{I_z = \oint_C f(z)dz = 0}$$

となる。これを Cauchy の積分定理という。

※Stokes の定理

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \left(\nabla \times \vec{A} \right) \cdot d\vec{s}$$

$\vec{A}$ ：ベクトル場

∂S ：領域 S を囲む経路

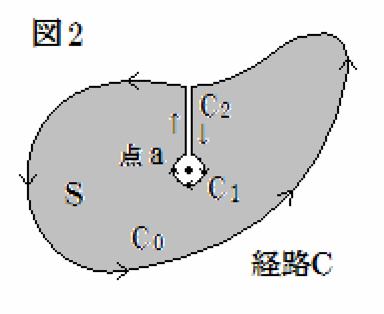
・Cauchy の積分公式

積分路C が閉曲線であるとし囲まれた領域をS とする。領域S にて正則な複素関数 f(z)を考え、S 内部に点a があるとする。(図1)

次のような周回積分を考える。

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

点a を除くような経路に考えると図２のようになる。



点a の周りを半径εで避けるように経路C_1を考え、点a に近づくための経路をC_2とし領域S を作る経路をC_0とすると、全経路C は

$$C = C_0 + (-C_1) + C_2$$

である。C_1の“ － ”はC_0に対して逆回転を意味する。
ところでC_2は上下の経路があり打ち消しあうと考え、0
結局、積分する全経路C の正味は$C = C_0 - C_1$
Cauchy の積分定理を考えると

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

$$= \oint_{C0} \frac{f(z)}{z-a}dz - \oint_{C1} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \oint_{C0} \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_{C1} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

この式の重要な事は、全経路C とほぼ同等の大きさを持つ経路C_0の周回積分とC_1での結果が等しいと言うことである。C_1について考えてみよう。

C_1はa を中心とし、半径εの円であるから

$$z - a = \varepsilon \cdot e^{i\theta}$$

と書き表すことが出来る。$dz = i\varepsilon \cdot e^{i\theta}d\theta$ より積分は

$$\oint_{C1} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon \cdot e^{i\theta} + a\right) \cdot \frac{i\varepsilon \cdot e^{i\theta}}{\varepsilon \cdot e^{i\theta}} d\theta = i\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon \cdot e^{i\theta} + a\right)d\theta$$

ここで$\varepsilon \to 0$とすると $f\left(\varepsilon \cdot e^{i\theta} + a\right) \to f(a)$となるので

$$i\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon \cdot e^{i\theta} + a\right)d\theta \to i\int_0^{2\pi} f(a)d\theta = i2\pi f(a)$$

つまり領域S に含まれる全ての点において経路C との関係が存在し

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

と出来る。これを Cauchy の積分公式という。

※幾つかの複素関数の参考書を調べるとこの辺りで Lauent(ローラン)展開の説明が出てくる。この「複素積分」では複素積分を中心にするため、Lauent 展開については最後に載せる。

・Goursat(グルサ)の公式

この公式は Cauchy の積分公式の拡張である。

Cauchy の積分公式を z について微分してみると、

$$\frac{d}{dz}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta \qquad \frac{d^2}{dz^2}f(z)=\frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}d\zeta \quad ,\cdots$$

と続いていくので結局 n 回微分すると

$$\frac{d^n}{dz^n}f(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

と出来る。この式を Goursat の公式と言う。

Goursat の公式は領域 S にて解析的であることを主張している。一階微分可能な関数 $f(z)$ は n 階微分可能でかつ n 階微分の $f(z)$ もまた領域 S にて解析的であること意味する。

・留数定理

今まで示してきた定理、公式を用いて「留数定理」なるものを明らかにしよう。ここまでの知識は本当に必要な物だけである事に注意したい。厳密に正しいとするにはもっと詳細について語らなければならない。しかしながらそれらは数学の参考書に譲るとする。

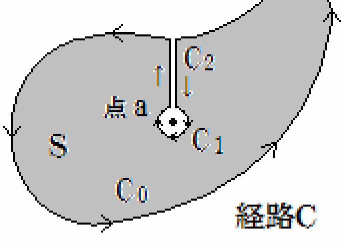
Cauchy の積分公式と同様な経路を考える。

点 a の周りを半径 ε で避けるように経路 C_1 を考え、領域 S を作る経路を C_0 とすると、全経路 C は

$$C = C_0 - C_1$$

と出来た。このような領域 S にて関数 $f(z)$ の積分

図 2



$$\oint_C f(z)dz=\oint_{C0} f(z)dz-\oint_{C1} f(z)dz$$ を考える。

複素関数 $f(z)$ は領域 S にて正則とする。

先と同様に結果(Cauchy の積分定理より)

$$\oint_{C0} f(z)dz=\oint_{C1} f(z)dz$$ となるので経路 C_1 に注目して積分を考える。

$z-a=\varepsilon\cdot e^{i\theta}$ と出来る事と Cauchy の積分公式の形を踏まえて次の変形してみる。

$$\oint_{C1} f(z)dz = \oint_{C1} f(z)\frac{z-a}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon \cdot e^{i\theta} + a\right)\cdot \frac{z-a}{\varepsilon \cdot e^{i\theta}} i\varepsilon \cdot e^{i\theta} d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon \cdot e^{i\theta} + a\right)\cdot (z-a)d\theta$$

$\varepsilon \to 0$ とすると $f\left(\varepsilon \cdot e^{i\theta} + a\right) \to f(a)$ となる。この極限は $z \to a$ でもある。
すなわち関数 $f(z)$ は領域 S にて正則であるからこの極限で収束する。

$$f(z)(z-a) \to A$$

極限の結果ある値 A に至ったとしよう。そうするとこの積分は

$$\oint_{C1} f(z)dz = i\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon \cdot e^{i\theta} + a\right)\cdot (z-a)d\theta = i\int_0^{2\pi} Ad\theta = i \cdot 2\pi A$$

と出来る。この値 A を留数(residue)と呼ぶ。点 a は領域 S より留めた点であり、除かれた点である。特に関数 $f(z)$ において点 a が特異点であり解析的では無いならば除外したい。
留数 A を

$$A \equiv \mathrm{Res}[f(z), a]$$

と書くことにする。

以上をまとめると

$$\oint_{C1} f(z)dz = i \cdot 2\pi \lim_{z\to a} f(z)(z-a) = i \cdot 2\pi \mathrm{Res}[f(z), a]$$ である。

まだ留数の正体がわからないので意味が無い。留数の正体に迫ってみよう。

留数 $A \equiv \mathrm{Res}[f(z), a]$ が存在する、つまり

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = \mathrm{Res}[f(z), a] = A$$

と値をもつ場合、関数 $f(z)$ は一位の極 a を持つと言う。一般に a が m 位の極を持つ場合

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^m = \mathrm{Res}[f(z), a] = A$$

という意味である。
ここで m 位の極を持つ関数 $f(z)$ について考えたいので

$$f(z) \equiv \frac{g(z)}{(z-a)^m} \qquad g(z)：領域 S にて正則な関数$$

についての留数を考えよう。

Goursat の公式より

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}g(z)=\frac{(m-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta=\frac{(m-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^m}\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{-m}d\zeta$$

$$\left(\because \frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a-z+a}=(\zeta-a)^{-1}\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{-1}\right)$$

$$2\pi\cdot i\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}g(z)\right\}=\oint_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^m}\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{-m}d\zeta$$

するとここで $f(z)$ を代入すると

$$2\pi\cdot i\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m}}{dz^{m}}\left(f(z)(z-a)^m\right)\right\}=\oint_C f(\zeta)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{-m}d\zeta$$

極限 $z\to a$ を考えると $\dfrac{z-a}{\zeta-a}\to 0$ より

$$\oint_C f(\zeta)d\zeta=2\pi\cdot i\left\{\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-a)^m\right)\right\}$$ よって

$$\oint_C f(z)dz=2\pi\cdot i\left\{\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-a)^m\right)\right\}=2\pi\cdot i\mathrm{Res}[f(z),a]$$

となる。留数は

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-a)^m\right)$$ で表される。

結局、留数定理は

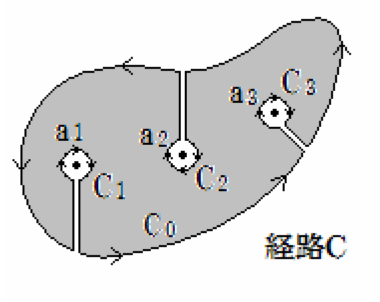
『積分を微分と極限で表現できる』という計算手法なのである。

・複数の極を持つ留数定理

特異点が n 個あることを考えると

$$\oint_C f(z)dz==2\pi\cdot i\sum_k^n \mathrm{Res}[f(z),a_k]$$

と書ける。これは右図と Cauchy の積分定理より明らかであろう。省略して書く。



$$\oint_C=\oint_{C0}-\oint_{C1}-\oint_{C2}\cdots=0\Rightarrow\oint_{C0}=\oint_{C1}+\oint_{C2}\cdots$$

・複素積分(例題)

さて留数定理の原理を見てきたが、もちろんこのままでは使い物にならない。例題を解き使い方を習得しよう。

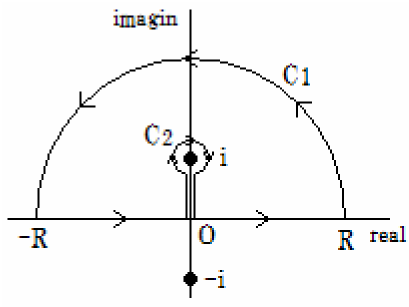
・基本例題１(留数定理を用いた複素積分)

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-i}$　　(3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$　　(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx$

$(0<a<1)$

(解１－1)

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$



まず

$$f(z)\equiv\frac{1}{z^2+1}$$ と定義する。

$f(z)$ は $z=\pm i$ において発散するので解析的ではない。特異点として考える。右図のような経路を考え、次の周回積分を考える。

$$\oint_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}+\int_{C1}f(z)dz-\oint_{C2}f(z)dz=0$$

となる。C_2 で留数を考えると

$$\oint_{C2}f(z)dz=2\pi\cdot i\mathrm{Res}[f(z),i]=2\pi\cdot i\lim_{z\to+i}\frac{1}{(z+i)(z-i)}(z-i)=\pi$$

次に C_1 について考える。

$z\equiv R\cdot e^{i\theta}$ とすると　$dz=Rie^{i\theta}$ より　また $R\to\infty$ とすれば

$$\int_{C1}f(z)dz=\int_{0}^{\pi}\frac{Rie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}d\theta\to 0$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}-\oint_{C2}f(z)dz=0\quad\to\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\oint_{C2}f(z)dz=\pi$$

である。

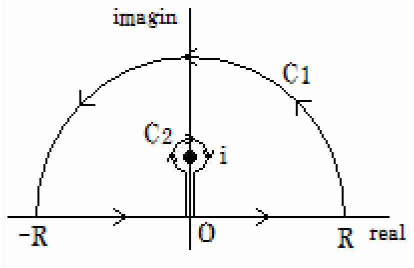
(解 1－2)

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-i}$

まず

$f(z)\equiv\dfrac{1}{z-i}$ と定義する。

$f(z)$ は特異点 $z=i$ を持つ。右図のような経路を考え、次の周回積分を考える。



$$\oint_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x-i}+\int_{C1}f(z)dz-\oint_{C2}f(z)dz=0$$

となる。C_2 で留数を考えると

$$\oint_{C2}f(z)dz=2\pi\cdot i\mathrm{Res}[f(z),i]=2\pi\cdot i\lim_{z\to+i}\frac{1}{z-i}(z-i)=2\pi\cdot i$$

次に C_1 について考える。

$z\equiv R\cdot e^{i\theta}$ とすると　$dz=Rie^{i\theta}$ より　また $R\to\infty$ とすれば

$$\int_{C1}f(z)dz=\int_0^{\pi}\frac{Rie^{i\theta}}{R\cdot e^{i\theta}-i}d\theta=\int_0^{\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}-i/R}d\theta\to\int_0^{\pi}i\cdot d\theta=i\cdot\pi$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-i}+\int_{C1}f(z)dz=\oint_{C2}f(z)dz\quad\Rightarrow\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-i}=\oint_{C2}f(z)dz-\int_{C1}f(z)dz$$

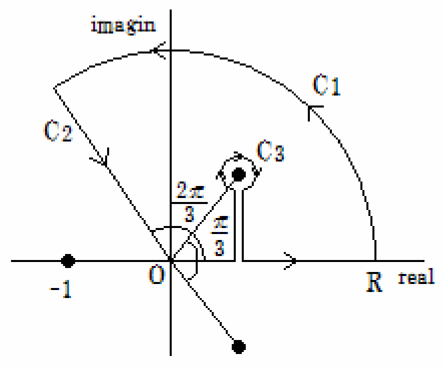
$$=2\pi\cdot i-\pi\cdot i=\pi\cdot i$$

である。

※(1)の問題では自分で与えた経路の寄与が積分に現われなかったが、この問題では寄与があった。付け足した経路の評価は必ずしなければならないことに注意しよう。

(解 1－3)

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} \equiv I$



まず

$$f(z) \equiv \frac{1}{z^3+1}$$ と定義する。

$f(z)$ の特異点は $z=-1,\ \exp\left[i\frac{\pi}{3}\right],\ \exp\left[i\frac{-\pi}{3}\right]$ を持つ。

右図のような経路を考え、次の周回積分を考える。

$$\oint_C f(z)dz = \int_0^R \frac{dx}{x^3+1} + \int_{C1} f(z)dz + \int_{C2} f(z)dz - \oint_{C3} f(z)dz = 0$$

C_3 で留数を考えると、

$$\oint_{C3} f(z)dz = 2\pi \cdot i\mathrm{Res}[f(z), e^{i\pi/3}] = 2\pi \cdot i \lim_{z\to i\frac{\pi}{3}} \frac{z-e^{i\cdot\pi/3}}{(z+1)\left(z-e^{i\cdot\pi/3}\right)\left(z-e^{-i\cdot\pi/3}\right)}$$

$$= \frac{2\pi \cdot i}{\left(e^{i\cdot\pi/3}+1\right)\left(e^{i\cdot\pi/3}-e^{-i\cdot\pi/3}\right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\left(e^{i\pi/3}+1\right)}$$

次に C_1 と C_2 の寄与を考えよう。　$R\to\infty$ の極限も考えると

$$\int_{C1} f(z)dz = \int_0^{2\pi/3} \frac{Rie^{i\theta}}{R^3e^{3i\theta}+1} d\theta \to 0$$

$$\int_{C2} f(z)dz = \int_R^0 \frac{e^{i2\pi/3}}{x^3+1}dx = -e^{i2\pi/3}\int_0^R \frac{1}{x^3+1}dx \to -e^{i2\pi/3}\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx = -e^{i2\pi/3}\cdot I$$

以上より

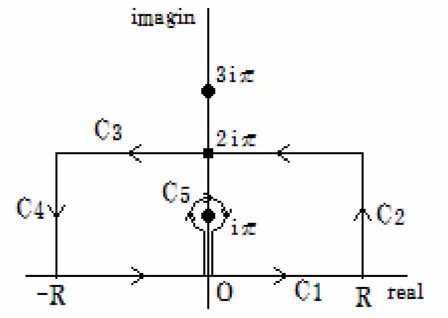
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} + 0 + \int_{C2} f(z)dz = \oint_{C3} f(z)dz \quad \Rightarrow \quad \left(1-e^{i2\pi/3}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \oint_{C3} f(z)dz$$

よって

$$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$ 　　　　となる。

(解 1－4)

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{a\cdot x}}{1+e^{x}}dx \equiv I$　　但し$(0<a<1)$



まず　$f(z)\equiv\dfrac{e^{a\cdot z}}{1+e^{z}}$　と定義する。

特異点は$z=i\pi, 3i\pi, \cdots$と幾つも存在する。

右図のような経路を考え、次の周回積分を考える。

$$\oint_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{a\cdot x}}{1+e^{x}}dx+\int_{C2}f(z)dz+\int_{C3}f(z)dz+\int_{C4}f(z)dz-\oint_{C5}f(z)dz=0$$

これから簡単のために

$\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{e^{a\cdot x}}{1+e^{x}}dx=\int_{C1}f(z)dz\equiv I_1$　のように書くとする。ちなみに$R\to\infty$にて$I_1\to I$

さて各々の経路の寄与を調べてみる。

$$I_2=\int_0^{2i\pi}\frac{e^{a(z+R)}}{1+e^{z+R}}dz\to 0\qquad I_4=\int_{2i\pi}^{0}\frac{e^{a(z-R)}}{1+e^{z-R}}dz\to 0\qquad (\text{どちらも } a<1 \text{より})$$

$$I_3=\int_R^{-R}\frac{e^{a(z+2i\pi)}}{1+e^{z+2i\pi}}dz=-\int_{-R}^{R}\frac{e^{2ai\pi}\cdot e^{az}}{1+e^{z}}dz=-e^{2ai\pi}I_1\to -e^{2ai\pi}I$$

結局

$\displaystyle\oint_{C5}f(z)dz=I_1+I_2+I_3+I_4\to\left(1-e^{2ai\pi}\right)I$　　となるのでC_5での留数を考える。

$$\mathrm{Res}[f(z),i\pi]=\lim_{z\to i\pi}\frac{e^{a\cdot z}}{1+e^{z}}(z-i\pi)$$

e^{z}を$i\pi$近傍について Taylor 展開をすると

$$e^{z}=e^{i\cdot\pi}+e^{i\cdot\pi}(z-i\pi)+\cdots\approx -1+e^{i\pi}(z-i\pi)\qquad\Rightarrow\qquad 1+e^{z}\approx e^{i\pi}(z-i\pi)$$

であるから、$z\to i\pi$の極限にて　$\displaystyle\mathrm{Res}[f(z),i\pi]=\lim_{z\to i\pi}\frac{e^{a\cdot z}}{1+e^{z}}(z-i\pi)=-e^{ai\pi}$

以上より

$$\oint_{C5}f(z)dz=\left(1-e^{2ai\pi}\right)I=2i\pi\left(-e^{ai\pi}\right)$$

$$\therefore\quad I=\frac{-2i\pi}{e^{-ai\pi}-e^{ai\pi}}=\frac{-2i\pi}{-2i\sin[a\pi]}=\frac{\pi}{\sin[a\pi]}\qquad \text{となる。}$$

・基本例題２(少々技術のいる複素積分)

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\cos[x]+a}$　(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{\sin[x]+a}$　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin[x]}{x}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}dx\cos[x^2]$ と $\displaystyle\int_0^{\infty}dx\sin[x^2]$

但し　$a>1$　　但し　$a>1$

(解２−1)

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\cos[x]+a}$　$a>1$

まず $\cos[x]$ を書き換えることを考える。

$\cos[x]$ の定義式

$\cos[x]\equiv\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$　であるから $z\equiv e^{ix}$ とおけば

$\cos[x]=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$　　$dz=ie^{ix}dx=izdx$　より

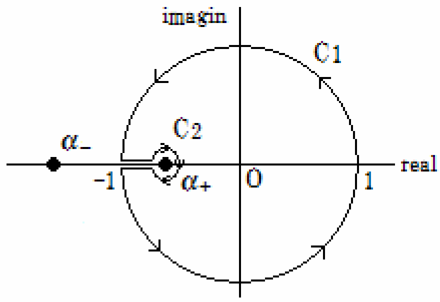
$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\cos[x]+a}=\oint_{C1}\frac{2}{z+1/z+2a}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{2}{i}\oint_{C1}\frac{dz}{z^2+2az+1}\equiv I$$

とかける。ここで、

$f(z)\equiv\dfrac{1}{z^2+2az+1}$　と定義する。 $f(z)$ は $z=-a\pm\sqrt{a^2-1}\equiv\alpha_{\pm}$ が特異点である。

$\alpha_{+}\equiv -a+\sqrt{a^2-1}$　$\alpha_{-}\equiv -a-\sqrt{a^2-1}$　と置く。又　$a>1$ より

$|\alpha_{+}|<1$　$|\alpha_{-}|>1$　$\alpha_{+},\alpha_{-}<0$ であるから



右図のような経路が考えられ、次の周回積分を考える。

$$\oint_{C1+C2}f(z)dz=\int_{C1}f(z)dz-\oint_{C2}f(z)dz=0$$

留数は α_{+} について考えればよい。

$$\mathrm{Res}[f(z),\alpha_{+}]=\lim_{z\to\alpha+}\frac{z-\alpha_{+}}{(z-\alpha_{+})(z-\alpha_{-})}=\frac{1}{\alpha_{+}-\alpha_{-}}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

より

$$\therefore\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\cos[x]+a}=I=\frac{2}{i}\oint_{C1}\frac{dz}{z^2+2az+1}=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\alpha_{+}]=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

となる。

(解 2－2)

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{\sin[x]+a}\quad a>1$

(1)と同様にして考える。 $z\equiv e^{ix}$ とおき、

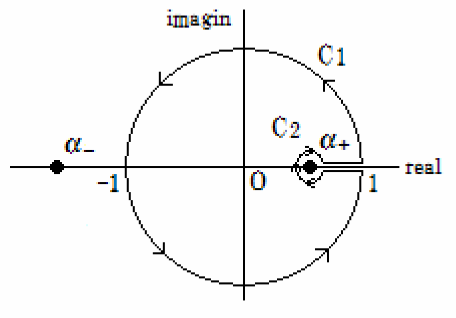
$$\sin[x]\equiv\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\qquad dz=ie^{ix}dx=izdx\qquad \text{より}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{\sin[x]+a}=\oint_{C1}\frac{2i}{z-{}^{1}\!/_{z}+2a}\cdot\frac{dz}{iz}=2\oint_{C1}\frac{dz}{z^2+2az-1}\equiv I$$

$f(z)\equiv\dfrac{1}{z^2+2az-1}$ と定義する。特異点は $z=-a\pm\sqrt{a^2+1}\equiv\alpha_{\pm}\quad a>1$ より

$|\alpha_+|<1\quad|\alpha_-|>1\quad\alpha_+>0,\ \alpha_-<0$ であるから

右図のような経路が考えられ、次の周回積分を考える。



$$\oint_{C1+C2}f(z)dz=\int_{C1}f(z)dz-\oint_{C2}f(z)dz=0$$

留数は α_+ について考えればよい。

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\alpha_+\right]=\lim_{z\to\alpha+}\frac{z-\alpha_+}{(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)}=\frac{1}{\alpha_+-\alpha_-}=\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}\qquad\text{より}$$

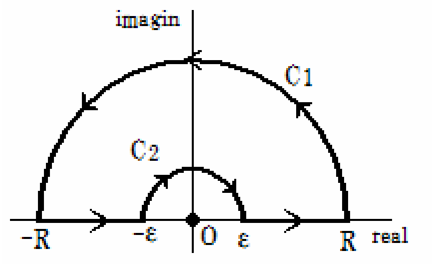
$$\therefore\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{\sin[x]+a}=I=2\oint_{C1}\frac{dz}{z^2+2az-1}=2\cdot2\pi i\,\mathrm{Re\,s}\left[f(z),\alpha_+\right]=\frac{2\pi i}{\sqrt{a^2+1}}\qquad\text{となる。}$$

※例題(1)，(2)らは共に特異点を二つ持つが条件より一方を選択し、経路を積分している。
またこれらの積分は基本例題 1 とは異なり、積分路がそのまま留数の計算となっている。
どちらの例題にしても経路のとり方は重要である。

(解 2－3)

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin[x]}{x}dx$　　　　$\dfrac{\sin[x]}{x}$ の特異点は $x=0$ のときである。

$x=0$ を積分路から除くために右図のような積分路を考える。極限 $\varepsilon\to0, R\to\infty$ のとき目的の積分路が表現できそうである。



$\cos[x]\sin[x]$ などが入ってきた場合は、まず e^{ix} の形を考えてみることである。

$$\cos[x]=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\qquad\sin[x]=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$ の形を狙うためである。

次の積分を考える。Cauchy の積分定理より経路 C $(C_1+C_2+\{-R,-\varepsilon\}+\{\varepsilon,R\})$ において

$$\oint_C\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$ (経路 C において特異点 $x=0$ が除かれているため)

経路を明らかにして書き直せば、

$$\oint_C\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C1}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C2}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx=0$$

となる。$\{-R,-\varepsilon\}$ の積分を $x\to-x$ と変数変換してやれば一項目とあわせて、

$$\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C1}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C2}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}dx=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx+\int_{C1}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C2}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

とできる。さらに $\sin[x]$ の形を意識すれば、

$$\Rightarrow\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin[x]}{x}dx=-\int_{C1}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C2}\frac{e^{iz}}{z}dz$$

改めて $z\equiv re^{i\theta}$ と置いてやると

$$\int\frac{e^{iz}}{z}dz=\int\frac{\exp\left[ire^{i\theta}\right]}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=i\int\exp\left[ir\left(\cos[\theta]+i\sin[\theta]\right)\right]d\theta$$

このようになることから C_1,C_2 について $\varepsilon\to0, R\to\infty$ の積分を考えてみよう。

$$\int_{C1}dz\to\int_0^{\pi}d\theta\quad と\quad\int_{C2}dz\to\int_{\pi}^{0}d\theta$$ に注意する。

$C_1 : R \to \infty$ について

$$\left| i\int_0^{\pi} \exp[iR(\cos[\theta] + i\sin[\theta])]d\theta \right| < \int_0^{\pi} \left|\exp[iR(\cos[\theta] + i\sin[\theta])]\right| d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \exp[-R\sin[\theta]]d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \exp[-R\sin[\theta]]d\theta \le 2\int_0^{\pi/2} \exp\left[-R\frac{2}{\pi}\theta\right]d\theta$$

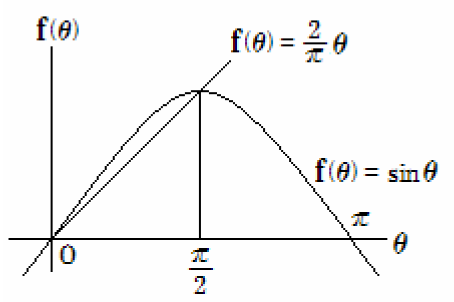
$$= \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right) \underset{R\to\infty}{\to} 0 \qquad ※$$

※

範囲 $\left\{0, \pi/2\right\}$ にて $\sin[\theta] \ge \dfrac{2}{\pi}\theta$

右図を見ればわかると思う。

$$\therefore \exp[-R\sin[\theta]] \le \exp\left[-R\frac{2}{\pi}\theta\right]$$



$C_2 : \varepsilon \to 0$ について

$$i\int_{\pi}^{0} \exp[i\varepsilon(\cos[\theta] + i\sin[\theta])]d\theta \underset{\varepsilon\to 0}{\to} -i\int_0^{\pi} d\theta = -i\pi$$

以上より

$$2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin[x]}{x}dx = -\int_{C1} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{C2} \frac{e^{iz}}{z}dz \to \int_0^{\infty} \frac{\sin[x]}{x}dx = \frac{1}{2i}\{-0 - (-i\pi)\} = \frac{\pi}{2}$$

となる。

※※　当然の事だが複素積分が全て留数を利用した積分ではない。
$R \to \infty$ での評価で用いた方法は「Jordan の補助定理」と呼ばれるものである。一般の形を後に記しておこう。途中でも注意したが $\cos[x]\sin[x]$ などが入ってきた場合は、まず e^{ix} の形で複素積分を利用することを考える。例題(4)も同様な部分が現われるので意識しよう。

(解 2－4)

(4)　$\int_0^{\infty} dx\cos[x^2]$ と $\int_0^{\infty} dx\sin[x^2]$

$\cos[x^2]+i\sin[x^2]=\exp[ix^2]$ の関係も考えて

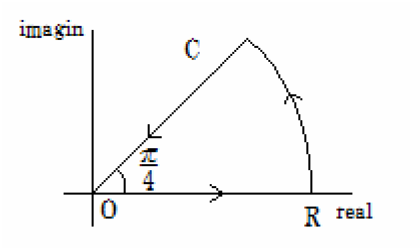
複素関数

$f(z)\equiv\exp[iz^2]$

と定義し右図のような経路を考える。

この経路においてこの関数はどこも正則である。

従って Cauchy の積分定理より



$\oint_C f(z)dz=\oint_C \exp[iz^2]dz=0$　　　である。

経路の詳細を考えて、積分を考えてみると

$$\oint_C f(z)dz=\int_0^R dx\exp[ix^2]+\int_0^{\pi/4} d\theta\cdot iR\cdot\exp\left[iR^2(\exp[i2\theta])\right]\cdot\exp[i\theta]$$

$$+\int_R^0 dr\exp\left[ir^2\left(\exp\left[i\frac{\pi}{2}\right]\right)\right]\cdot\exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]=0$$

である。先に示したように $\exp[ix^2]$ の形を変え、第 2 項目を例題 2－(3)と同様に考えると、

$$\exp\left[iR^2(\exp[i2\theta])\right]=\exp\left[iR^2(\cos[2\theta]+i\sin[2\theta])\right]$$

$$\left|\int_0^{\pi/4} d\theta\cdot iR\cdot\exp\left[R^2(i\cos[2\theta]-\sin[2\theta])\right]\cdot\exp[i\theta]\right|\le R\int_0^{\pi/4} d\theta\exp\left[-R^2\sin[2\theta]\right]$$

$$\le\frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} d\phi\exp\left[-R^2\frac{2}{\pi}\phi\right]\quad(\because 2\theta\equiv\phi)$$

$$=\frac{\pi}{4R}\left(1-\exp[-R^2]\right)\quad\xrightarrow[R\to\infty]{}\quad 0$$

と評価できる。よってこの積分は

$\oint_C f(z)dz=\int_0^R dx\exp[ix^2]-\exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]\int_0^R dr\exp[-r^2]=0$　　を計算すればよい。

初等積分 Gauss 積分は　$\int_0^{\infty} dx\exp[-x^2]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　であるから。

$$\Rightarrow \int_0^R dx \exp[ix^2] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^R dr \exp[-r^2]$$

$$\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty dx\left(\cos[x^2] + i\sin[x^2]\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^\infty dr \exp[-r^2] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

この結果より実部と虚部に分けて表せば、

$$\int_0^\infty dx \cos[x^2] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \int_0^\infty dx \sin[x^2] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

又

$$\int_0^\infty dx \cos[x^2] = \int_0^\infty dx \sin[x^2]$$ がわかる。

※実部と虚部に分けて積分の値を示すことが出来るのも、複素積分ならではである。

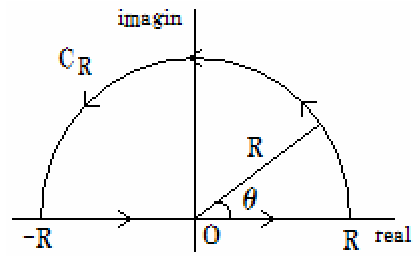
さて例題(2－3),(2－4)で出てきた Jordan の補助定理をまとめておこう。

・Jordan の補助定理

$z \to \infty$ にて関数 $f(z)$ が考える領域にて一様に
$f(z) \to 0$ であるとき
右図のような経路の半円部分での積分

$$I_R = \int_{C_R} dz \exp[iaz] f(z) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

である。ただし a は正の実数とする。



(証明)

$z \equiv R\cdot\exp[i\theta]$ とおくと

$$I_R = \int_{C_R} dz \exp[iaz] f(z) = \int_0^\pi d\theta \exp[iaR(\cos\theta + i\sin\theta)]\cdot f(R\cdot e^{i\theta})\cdot iR\cdot e^{i\theta}$$

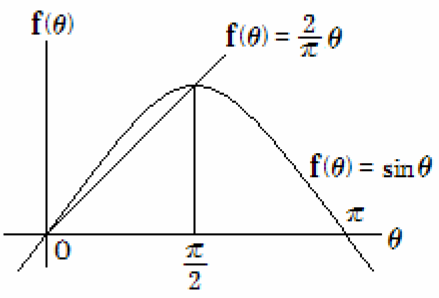
条件より R が非常に大きいと $f(z)$ は任意の実数 ε にて $|f| < \varepsilon$ と評価されるから

$$|I_R| \le R\int_0^\pi d\theta \exp[-aR\sin\theta] < 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2} d\theta \exp[-aR\sin\theta]$$

となる。ここからは例題と同様に

範囲$\left\{0, \pi/2\right\}$において$\sin[\theta] \geq \dfrac{2}{\pi}\theta$

$$\therefore \exp[-R\sin[\theta]] \leq \exp\left[-R\frac{2}{\pi}\theta\right]$$



とできるから、

$$\left|I_R\right| < 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2} d\theta \exp[-aR\sin\theta] \leq 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2} d\theta \exp\left[-aR\frac{2}{\pi}\theta\right] = \varepsilon\frac{\pi}{a}\left(1-e^{-aR}\right) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

と一般の形で表現できた。途中で$\cos\theta$の項が消えていたのでその理由を示すと

右図は

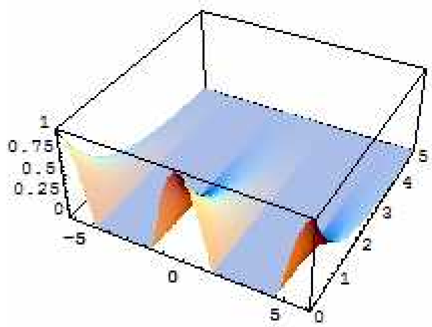
$$f(x, y) \equiv \mathrm{Re}[\exp[iz]] = e^{-y}\cos[x]$$

を$\{-2\pi, 2\pi; x\}$ $\{0,5; y\}$の範囲で描いた物である。

小さくなっていくのがわかるように描いた範囲は

$\{0,1; f(x, y)\}$とした。

確かにすぐに小さくなる事がわかる。



・基本例題３

留数定理の説明で極の位数と数について述べていたのでそれぞれの例題を示しておく。

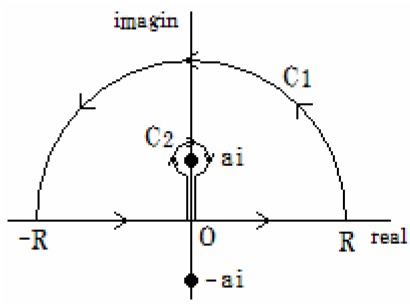
(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$

(解 3－1)

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$

まず　$f(z) \equiv \dfrac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2}$　と定義する。

$f(z)$は$z = \pm ai$で特異点を持つ。この特異点は 2 位の極であることに注意する。右図のような経路を考え、次の周回積分を考える。



$$\oint_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}+\int_{C1}f(z)dz-\oint_{C2}f(z)dz=0$$

となる。C_2 で留数を考えると

$z\equiv R\cdot\exp[i\theta]$ とおくとそれぞれの経路の積分は

$$\int_{C1}f(z)dz=\int_0^{\pi}\frac{Ri}{\left(R^2e^{2i\theta}+a^2\right)^2}d\theta\underset{R\to\infty}{\to}0\qquad \text{(Jordan の補助定理より)}$$

$$\oint_{C2}f(z)dz=2\pi i\mathrm{Res}\left[f(z),ai\right]=2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2}(z-ai)^2\right)=2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}(z+ai)^{-2}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{-2}{(z+ai)^3}=\frac{2\pi i}{4a^3i}=\frac{\pi}{2a^3}$$

以上より $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{\pi}{2a^3}$$

(解 3－2)

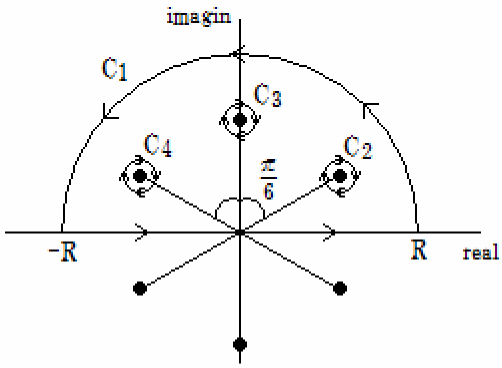
(2) $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$$

まず $f(z)\equiv\dfrac{1}{z^6+1}$ と定義する。

$f(z)$ には

$$z=\exp\left[\frac{i\pi}{6}(2m-1)\right]\qquad m=1,2,3,4,5,6$$

の 6 個の特異点がある。



右図のような経路を考えると半円に含まれる特異点は 3 個ある。

$$\oint_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(z)dz+\int_{C1}f(z)dz-\oint_{C2}f(z)dz-\oint_{C3}f(z)dz-\oint_{C4}f(z)dz=0$$

の積分を考える。

まずC_1 は $z\equiv R\cdot\exp[i\theta]$ とすると

$$f(z)\equiv\frac{1}{z^6+1}=\frac{1}{R^6\exp[i6\theta]+1}\qquad \left|f(z)\right|\le\frac{1}{\left|R^6\exp[i6\theta]\right|+1}<\frac{1}{R^6}\underset{R\to\infty}{\to}0$$

となるから、

$$\int_{C1} f(z)dz \to 0 \qquad (R \to \infty \text{にて})$$

次にC_2、C_3、C_4について各々の留数を考えると

$$\mathrm{Res}\left[f(z), \exp\left[\frac{\pi}{6}i\right]\right]_{C2} = \lim_{z \to \exp[\frac{\pi}{6}i]}\left\{\frac{1}{z^6+1}\left(z - e^{\pi/6 i}\right)\right\} = \lim_{z \to \exp[\frac{\pi}{6}i]} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}\exp\left[-i\frac{5\pi}{6}\right]$$

$$\mathrm{Res}\left[f(z), \exp\left[\frac{\pi}{2}i\right]\right]_{C3} = \lim_{z \to \exp[\frac{\pi}{2}i]}\left\{\frac{1}{z^6+1}\left(z - e^{\pi/2 i}\right)\right\} = \lim_{z \to \exp[\frac{\pi}{2}i]} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}\exp\left[-i\frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\mathrm{Res}\left[f(z), \exp\left[\frac{5\pi}{6}i\right]\right]_{C4} = \lim_{z \to \exp[\frac{5\pi}{6}i]}\left\{\frac{1}{z^6+1}\left(z - e^{5\pi/6 i}\right)\right\} = \lim_{z \to \exp[\frac{5\pi}{6}i]} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}\exp\left[-i\frac{25\pi}{6}\right]$$

である。※

以上より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \oint_{C2} f(z)dz + \oint_{C3} f(z)dz + \oint_{C4} f(z)dz$$

$$= 2\pi i \frac{1}{6}\left\{\exp\left[-i\frac{5}{6}\pi\right] + \exp\left[-i\frac{5}{2}\pi\right] + \exp\left[-i\frac{25}{6}\pi\right]\right\}$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left\{\exp\left[-i\frac{5}{6}\pi\right] + \exp\left[-i\frac{1}{2}\pi\right] + \exp\left[-i\frac{1}{6}\pi\right]\right\}$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) + (0 - i) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right\} = \frac{\pi i}{3}(-2i) = \frac{2\pi}{3}$$

となる。

※L'Hospital(ロピタル)の公式を用いている。

次はちょっとした応用例を挙げておく。実際に出くわすであろう例題である。

・応用例　次の関数をフーリエ逆変換せよ。

$$\phi(\vec{k}) = \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{1}{k^2+\lambda^2}$$

e ：電荷　ε_0 ：真空誘電率　$\lambda \geq 0$

この関数が含む変数から察するにある物理の意味を持つ関数である事は分かるであろう。

計算結果をよく吟味したい。

(解)

フーリエ逆変換をすると

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\phi(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e}{\varepsilon_0}\int d\vec{k}\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2+\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e}{\varepsilon_0}\int_0^\infty dk k^2\int_0^\pi d\theta \sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2+\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{e}{\varepsilon_0}\int_0^\infty dk k^2\int_{-1}^1 d\alpha\frac{e^{ikr\alpha}}{k^2+\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{e}{\varepsilon_0}\frac{1}{ir}\int_0^\infty dk\frac{k(e^{ikr}-e^{-ikr})}{k^2+\lambda^2}$$

積分の部分を二つに分け、それぞれで複素積分を考えると

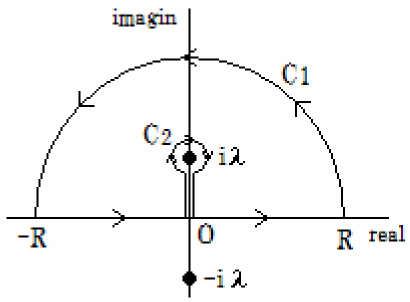
$$f_1(z) \equiv \frac{ze^{izr}}{z^2+\lambda^2} \qquad f_2(z) \equiv \frac{ze^{-izr}}{z^2+\lambda^2} \qquad \text{特異点：}\ z = \pm i\lambda$$

と $f_1(z), f_2(z)$ を定義する。

先ず

$$f_1(z) \equiv \frac{ze^{izr}}{z^2+\lambda^2} \qquad \text{特異点：}\ z = \pm i\lambda$$

について右図のような経路の複素積分を考える。



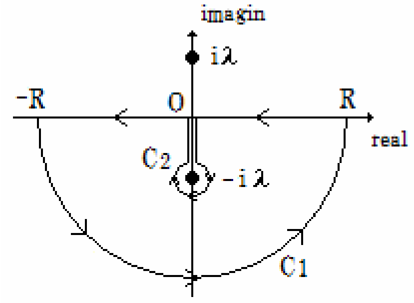
$$\oint_C f_1(z)dz = \int_{-R}^{R} f_1(z)dz + \int_{C1} f_1(z)dz - \oint_{C2} f_1(z)dz = 0$$

$R \to \infty$ において C_1 の寄与は無い。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\ f_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\frac{ze^{izr}}{z^2+\lambda^2} = 2\pi i \mathrm{Res}\left[f_1(z), +i\lambda\right] = \pi i e^{-\lambda r}$$

$$f_2(z)=\frac{ze^{-izr}}{z^2+\lambda^2}\qquad \text{特異点：}\ z=\pm i\lambda$$

について右図のような経路の複素積分を考える。



$$\oint_C f_2(z)dz=\int_R^{-R} f_2(z)dz+\int_{C1} f_2(z)dz-\oint_{C2} f_2(z)dz=0$$

これも $R\to\infty$ において C_1 の寄与は無い。よって

$$\int_{\infty}^{-\infty}dz\ f_2(z)=-\int_{-\infty}^{\infty}dz\ f_2(z)=\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{ze^{-izr}}{z^2+\lambda^2}=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f_1(z),-i\lambda\right]=-\pi ie^{-\lambda r}$$

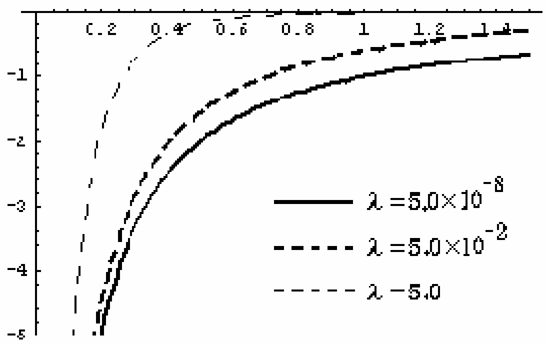
$f_1(z),\ f_2(z)$ は共に偶関数である事に気付けば目的の積分は出来て、結局

$$\phi(\bar r)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{e}{\varepsilon_0}\frac{1}{ir}\int_0^{\infty}dk\frac{k(e^{ikr}-e^{-ikr})}{k^2+\lambda^2}=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{e}{\varepsilon_0}\frac{1}{ir}\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\infty}dk\ f_1(k)-\int_0^{\infty}dk\ f_2(k)\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{e}{\varepsilon_0}\frac{1}{ir}\frac{1}{2}\left(\pi ie^{-\lambda r}+\pi ie^{-\lambda r}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{e}{\varepsilon_0}\frac{\exp[-\lambda r]}{r}\quad\xrightarrow[\lambda\to+0]{}\quad\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}$$

となる。これはいわゆる Yukawa 型の形をした Coulomb Potential である。
式のように $\lambda\to+0$ の極限にてよく知る形になる。実は $1/r$ の形を持つ Coulomb Potential はフーリエ変換をしようとすると発散してしまい、λ が無いと上手く出来ないのである。Yukawa 型の形での λ は Potential が有効である距離の逆数の意味を持つ。即ち $\lambda\to+0$ は Coulomb Potential が無限遠まで到達する事を示している。(実際に図にしてみると下図)



原子核の立場でちょっと強く言いたい事としてはこの λ には力を媒介する粒子質量の逆数を含む事である。つまり Coulomb Potential の媒介粒子の質量は…
私としては物理をしていてとても感動した事の一つである。
(実は天下り的だったりする)

基本例題 1,2,3,応用例について見てきたが、まだ十分ではない。
積分路上に特異点がある場合は考えていない。解決する手法として「Cauchy の主値積分」という考え方がある。この手法の紹介をし、さらに虚数部分と実数部分の関係を表現した変換、Kramaers‐Kronig(クラマース‐クローニッヒ)変換を紹介する。(K‐K 変換)

・Cauchy の主値積分

今までは特異点周りに積分路を考え、留数定理によって積分値を求めていた。
実数軸上に特異点がある場合を考えてみよう。この条件を持つ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx \qquad a\ \text{：実数}$$

について考えよう。まず複素平面上に

$$F(z)=\frac{f(z)}{z-a}$$

を定義する。 $f(z)$ は実軸上で正則であるとし、 $F(z)$ が $z=a$ にて極を持つものとする。

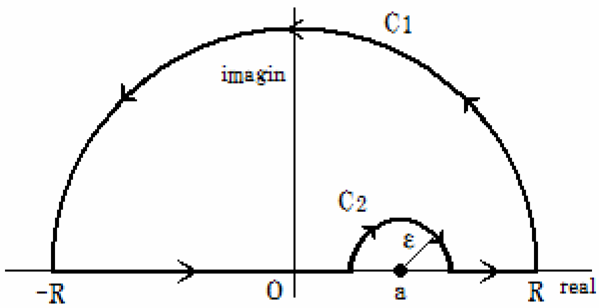
また $f(z)$ は無限遠方 $|z|\to\infty$ にて

$$|z|^k|f(z)|<M \qquad k,M\ \text{：定数} \qquad \cdots\cdots(※)$$

が収束するものとする。

以上を踏まえて右図の積分路を考える。
特異点 a の上方を周るような積分路 C_2 を取る。また C_2 の半径を ε とする。
Cauchy の積分定理よりこの経路では

$$\oint_C F(z)dz=0$$



さらに詳しく経路を考えると

$$\oint_C F(z)dz=\int_{-R}^{a-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-a}dx+\int_{a-\varepsilon}^{R}\frac{f(x)}{x-a}dx+\int_{C2}F(z)dz+\int_{C1}F(z)dz=0$$

となる。今までは特異点が全積分路の内側に極が存在し、留数定理が扱えたがこの場合は異なる。(※)式を利用して経路 C_1 の積分を考えてみる。 $z\equiv R\cdot e^{i\theta}$ とおけば、

$$\left|\int_{C1}F(z)dz\right|=\left|\int_{C1}\frac{f(z)}{z-a}dz\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{f(R\cdot e^{i\theta})}{R\cdot e^{i\theta}-a}iR\cdot e^{i\theta}d\theta\right|\le\frac{R}{R-a}\int_0^{\pi}\left|f(R\cdot e^{i\theta})\right|d\theta<\frac{R}{R-a}\frac{\pi}{R^k}M$$

となるから、 $R\to\infty$ において経路 C_1 の寄与は無くなる。
つぎに経路 C_2 について考える。 $z-a\equiv\varepsilon\cdot e^{i\theta}$ とおけば、

$$\int_{C2}F(z)dz=\int_{C2}\frac{f(z)}{z-a}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{f(a+\varepsilon\cdot e^{i\theta})}{\varepsilon\cdot e^{i\theta}}i\varepsilon\cdot e^{i\theta}d\theta=i\int_{\pi}^{0}f(a+\varepsilon\cdot e^{i\theta})d\theta\underset{\varepsilon\to 0}{\to}-i\pi f(a)$$

従って $R\to\infty$ と $\varepsilon\to 0$ の極限においてこの積分は次のように書ける。

$$\oint_C F(z)dz = \int_{-R}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a}dx + \int_{a-\varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x-a}dx + \int_{C2} F(z)dz + \int_{C1} F(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_{-R}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a}dx + \int_{a-\varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x-a}dx \right] - i\pi f(a) = 0$$

ここで出てきた極限

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_{-R}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a}dx + \int_{a-\varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x-a}dx \right] \equiv P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a}dx$$

と定義しこれを Cauchy の主値積分と呼ぶ。以上より

$$f(a) = \frac{1}{i\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a}dx$$

の関係式が現われる。この両辺の実部と虚部をそれぞれ表してみると※

$$\mathrm{Re}\, f(a) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f(x)}{x-a}dx \qquad \mathrm{Im}\, f(a) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, f(x)}{x-a}dx$$

これら実部と虚部の関係式を K-K 変換(又は分散公式)という。

※実部虚部は下のように計算した。

$$\left(\begin{aligned} \mathrm{Re}\, f(a) &= \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{i\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, f(x) + i\,\mathrm{Im}\, f(x)}{x-a}dx \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\,\mathrm{Re}\, f(x) + \mathrm{Im}\, f(x)}{x-a}dx \right\} \\ \mathrm{Im}\, f(a) &= \mathrm{Im}\left\{ \frac{1}{i\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, f(x) + i\,\mathrm{Im}\, f(x)}{x-a}dx \right\} = \mathrm{Im}\left\{ \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\,\mathrm{Re}\, f(x) + \mathrm{Im}\, f(x)}{x-a}dx \right\} \end{aligned} \right)$$

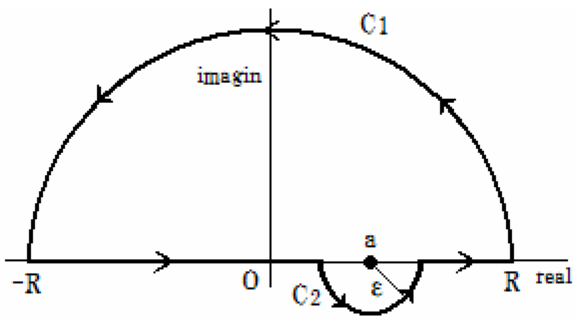
さて K-K 変換まで紹介したが、主値積分に至る計算方法の経路の取り方がまだあるので紹介したいと思う。紹介するのはこの経路のとり方の計算が時々出てくるためである。

・Cauchy の主値積分(別経路 1)

先と同様な条件で右図の積分路を考える。特異点 a の下方を周るような積分路 C_2 を取る。また C_2 の半径を ε とする。Cauchy の積分定理より

$$\oint_C F(z)dz = 0$$

となるのは同じだが、



この経路を詳しく見てみると特異点aを含んでいるので留数部分が入っていて

$$\oint_{C} F(z)dz = \int_{-R}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a}dx + \int_{a-\varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x-a}dx + \int_{C2} F(z)dz + \int_{C1} F(z)dz - 2\pi i \mathrm{Res}\left[F(z), a\right] = 0$$

経路C_1の寄与は前述と同様にして$R \to \infty$にてなくなる。経路C_2も同様について考えると$z - a \equiv \varepsilon \cdot e^{i\theta}$とおいて、(範囲は$\pi \to 2\pi$)

$$\int_{C2} F(z)dz = \int_{C2} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon \cdot e^{i\theta})}{\varepsilon \cdot e^{i\theta}} i\varepsilon \cdot e^{i\theta} d\theta = i\int_{\pi}^{2\pi} f(a+\varepsilon \cdot e^{i\theta}) d\theta \underset{\varepsilon \to 0}{\to} i\pi f(a)$$

留数の部分は

$$-2\pi i \mathrm{Res}\left[F(z), a\right] = -2\pi i \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{x-a}(x-a) = -2\pi i f(a)$$

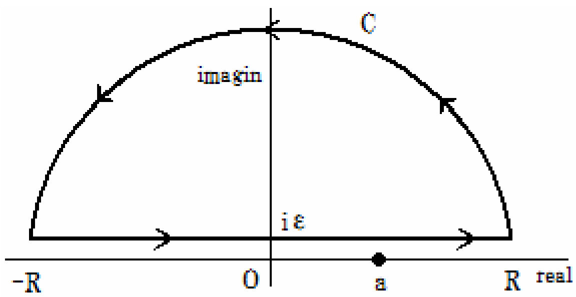
であるから、全てまとめると

$$\oint_{C} F(z)dz = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a}dx + i\pi f(a) + -2\pi i f(a) = 0 \quad \to \quad \therefore\ f(a) = \frac{1}{i\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a}dx$$

結局同じ結果を与えた。これは初めの経路の結果をより確かにするため紹介した。
次は時々出てくる計算を意識した経路で計算する。

・Cauchy の主値積分(別経路 2)

先と同様な条件で右図の様な、特異点aの上方$i\varepsilon$だけ通過するような積分路Cを考える。



Cauchy の積分定理より

$$\oint_{C} F(z)dz = 0$$

詳しく見てみる。

この経路の結果は$\varepsilon \to 0$で今まで見てきた積分と同じになるので、

$$\oint_{C} F(z)dz = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a}dx - i\pi f(a) = 0$$

である。左辺の詳細を考えると

$$\oint_{C} F(z)dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a+i\varepsilon}dx + \int_{半円} F(z)dz = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a}dx - i\pi f(a) = 0$$

$z = x + i\pi$としている。ここで$R \to \infty$とすると左辺の半円部分は先述同様なくなるので、結果、

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a+i\varepsilon}dx = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx - i\pi f(a)$$ である。

ここでδ関数を用いてもう少し変形させてみると、

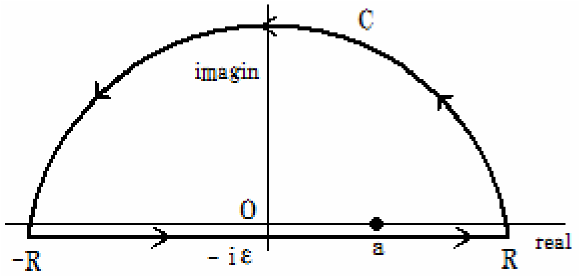
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a+i\varepsilon}dx = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx - i\pi f(a) = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx - i\pi\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)dx$$

と出来るので、次のように記号的に表現することが出来る。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-a+i\varepsilon} = \frac{P}{x-a} - i\pi\delta(x-a)$$

今は特異点の上を通過したが下も同様に考えることが出来て、

右図の様な、特異点 a の下方 $i\varepsilon$ だけ通過するような積分路 C を考える。



積分

$$\oint_C F(z)dz = 0$$

上方の時と同様に $R\to\infty$ にし、半円部分の寄与をなくし、留数を考えると

$$\oint_C F(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a-i\varepsilon}dx - 2\pi i\mathrm{Res}[F(z),a] = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx - i\pi f(a)$$

$$\therefore \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a-i\varepsilon}dx = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx + i\pi f(a)$$

$z = x - i\pi$ としている。先と同様に記号的に表した結果を合わせると

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-a\pm i\varepsilon} = \frac{P}{x-a} \mp i\pi\delta(x-a)$$

となる。

さて、この結果が何を意味するのかわからないと思うが、量子力学における散乱問題で Green 関数と呼ばれるものが出てくる。そのときにこの計算を思い出して貰えればよい。又、佐藤の超関数と呼ばれるものも出てくるらしいが、そういうものがあるということだけ知っていれば使うときに調べればよい。(参考図書の複素関数論を参照してください)

さて複素空間では多価関数の表現としてリーマン面を考える方法がある。次はそれについて述べていくことにしよう。

・リーマン面と分岐

・多価関数

複素空間のみではなく実関数 $f(x)$ とは何を意味するのか、少し考えてみよう。例えば

$$y = f(x)$$

という式があるとする。これはある x に対しある一つの y が決定することを意味し、その時 f は x 平面から y 平面への写像(mapping)を意味している。

実数空間では x と y は普通一対一対応の関数で写像される。この関数を一価関数と呼ぶ。

複素空間に広げた場合、

$$w = f(z)$$

とかけるとしても、 z と w が一対一対応に写像されるとは限らない。 z に対し w が複数対応する場合その写像、関数 f は多価関数と呼ばれる。例えば次の関数は多価関数である。

$$f(z) = z^{1/2}$$

この関数を満たす複素数を w としよう。そうすると

$$z = w^2$$

を満たし、 $z \equiv r\exp[i\theta]$ とおき、 w を $w \equiv a\exp[i\phi]$ とおいて求めてみると、

$$w^2 = a^2\exp[2i\phi] = r\exp[i\theta]$$

より

$$a = \sqrt{r} \quad \cdots \quad ① \qquad \exp[2i\phi] = \exp[i\theta] \quad \cdots \quad ②$$

であるが、①式は良いとしても②式は問題がある。②式を満たす条件は

$$2\phi = \theta + 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\theta}{2} + n\pi \qquad n：整数$$

となり解は無数に存在するのである。2π 回転すれば同じ複素数を表すが、π 回転では異なる複素数を表す。従ってこの z は $f(z)$ に代入すると次の二つの w になる可能性がある。

$$w_1 = \sqrt{r}\exp\left[i\frac{\theta}{2}\right] \quad w_2 = \sqrt{r}\exp\left[i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$$

このように一つの入力から出力が二つあるので $f(z)$ を二価関数と呼ぶ。

※比較のために $f(z) = z^2$ について求めると

$$w = z^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 = r^2\exp[2i\theta] = a\exp[i\phi]$$

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt{a}\exp\left[i\frac{\phi}{2}\right] \quad \text{or} \quad \sqrt{a}\exp\left[i\left(\frac{\phi}{2} + \pi\right)\right]$$

どちらの z を $f(z)$ に代入しても一つの w になる。

このような性質のため多価関数は今まで扱ったようには出来ない。複数ある出力に対し何の指定もないので、このままでは今までのような解析的な関数ではないのである。

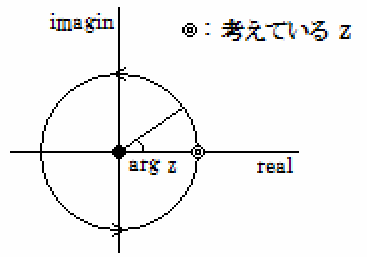
・リーマン面と分岐

さて多価関数を一価関数の様に扱うためにはどうすればよいか、そのために考え出された概念がリーマン面である。

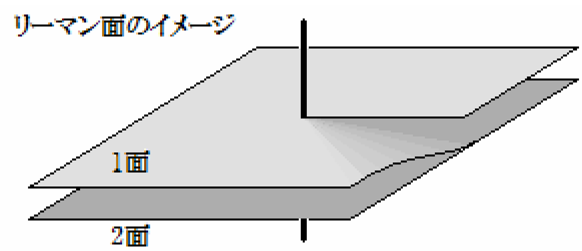
先の例の

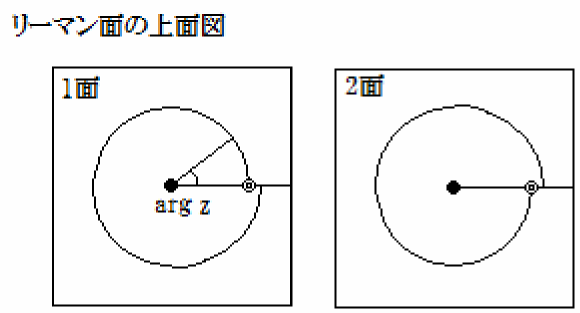
$$f(z) = z^{1/2}$$

についてリーマン面を考えることにする。



ある z が上記の $f(z)$ を満たすとし、
右の図のように偏角($\arg z$)を 2π 回転したとする。当然、元の z になるべきだが先の結果からもわかるように、$f(z)$ は二つの結果を持つ。つまりこの z が w_1^2 なのか w_2^2 なのか区別出来ない。





右図の様に 2 面で構成される複素面を考える。
このような多面の複素面をリーマン面と呼ぶ。
リーマン面の約束事は偏角が 2π 回転した場合 1 面から 2 面へと移るとし、偏角は 2π 増加させ別のものとして考える。さらに 2π 回転した場合 2 面から 1 面へと移ると約束しよう。
こうする事で w_1 と w_2 を区別するのである。
そうして多価関数

$$f(z) = z^{1/2}$$

は一価関数として扱えるのである。
もう一つの用語「分岐」について述べておく。
$f(z)$ には w_1 と w_2 の二つの結果がある。w_1、w_2 を $f(z)$ の分岐(分枝)と呼び、ある点 z_0 を一周したとき $f(z)$ が元に戻らないときこの z_0 を分岐点と呼ぶ。
上記の例では原点が分岐点となる。

また上の図のように 1 面から 2 面に移るときの境界線を分岐線、カットと呼ぶ。
分岐線の引き方について一つ例を考えてみよう。

・分岐線の例

$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$　を一意的な関数にするためのカットを考えよう。

(解)

$$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} \equiv w$$

とする。w は w^2 の様子を見るといくつ現われるだろうか

$$w^2 = z^2 - 1 = -(1 - z^2)$$

$$w = \pm\sqrt{z^2 - 1} \qquad \text{or} \qquad \pm i\sqrt{1 - z^2}$$

と 4 つも現われる。これらを一意的に扱うためにはどんなカットを考えればよいだろうか？

次に分岐線がある場合の複素積分について考えよう。

・分岐線がある複素積分

・Lauent(ローラン)展開

今まで書いてきた事は常に「複素積分」を実行するための話であった。よく見る参考書では留数定理を行う前に特異点を除外するための方法として Lauent 展開を紹介している。複素積分をする事だけを中心としたので書かないで済ましてきた。元々複素積分は複素平面上で関数を解析する、「複素関数解析」の一部に過ぎない。Lauent 展開は複素解析をするための最も基本となる展開であろう。複素解析入門と言う事で説明していこうと思う。

・複素関数の Taylor 展開

実数平面上で関数が任意の点で解析的であるとき Taylor 展開は可能である。さて複素平面上で同じ事が言えるのであろうか？確かめてみよう。

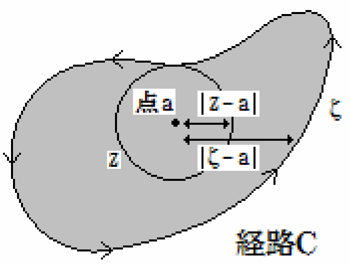
ある積分路C において解析的な複素関数 $f(z)$ は Cauchy の積分公式によって

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$ と表された。

経路C によって囲まれた領域内($f(z)$ はこの中で正則)の点 a の周りで Taylor 展開を考える。

$f(z)$ を点 a の周りで Taylor 展開すると言う事は $z-a$ の冪乗で展開することであるから、Cauchy の積分公式から $f(z)$ の冪級数表現を考える。(結構技巧的だと思う)

まず $z-a$ を出す事を考えよう。



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\frac{d\zeta}{\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}$$

※確かにこうすれば $z-a$ の項は出てくる。

$$\left(\frac{1}{\zeta-a}\frac{1}{\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\frac{1}{\zeta-a-z+a}=\frac{1}{\zeta-z}\right)$$

ここで注意するのは z と ζ の違いである。上の図で見るように経路C に沿って積分する複素変数が ζ であり、経路C によって囲まれた領域内の $f(z)$ の従属変数が z である。z が定義されている部分は経路C よりも内側つまり ζ よりも内側であるということである。これらから点 a との距離を z と ζ について考えれば式中の分数部分が次の様に書ける事がわかる。距離の不等式から始まって

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \qquad \because \left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=1+\alpha+\alpha^2+\cdots=\frac{1}{1-\alpha} \quad (|\alpha|<1)\right)$$

と出来るので結局 $f(z)$ は、

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{d\zeta}{\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

ここでさらに Goursat(グルサ)の公式より

※Goursat の公式も正則な領域で定義されたものである。

$$\frac{d^n}{dz^n}f(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\quad\rightarrow\quad\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}f(a)\equiv\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

となるから

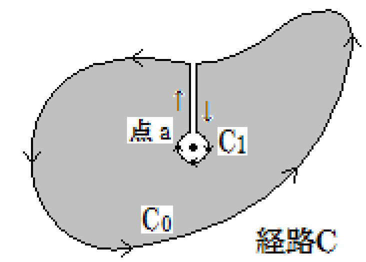
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

となり、まさに実数平面と同様な Taylor 展開の形に出来た。

・Lauent 展開

先の Taylor 展開と同様な事を考えるが、今度は経路C によって囲まれた領域内に特異点がある場合について考える。

領域内の特異点以外の場所では正則なので Taylor 展開が可能である。特異点付近の展開については Taylor 展開とは別の展開が必要である。それが Lauent 展開である。



特異点を考慮して Cauchy の積分公式を書くと

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{Co}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

と出来る。

ここでもまた注意するのは z と ζ の違いである。今度は経路によって特異点と z ,ζ との距離関係が異なる。経路 C_0 (大きい外側の囲い)上では z が定義されている部分は ζ よりも内側である。経路 C_1 (特異点周り)上では z が定義されている部分は ζ よりも外側である。これらを踏まえて距離の大小関係は

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1\quad\cdots\quad C_0\text{上}\qquad\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|<1\quad\cdots\quad C_1\text{上}$$

となるから Taylor 展開と同様 Cauchy の積分公式を上の関係を意識して書き換える。

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{Co}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{Co}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{Co}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{d\zeta}{\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}\frac{f(\zeta)}{z-a}\frac{d\zeta}{\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)}$$

それぞれの項で級数の形に書き換える。

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{Co}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{d\zeta}{\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}\frac{f(\zeta)}{z-a}\frac{d\zeta}{\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{Co}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}\frac{f(\zeta)}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{Co}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^{-(n+1)}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}f(\zeta)(\zeta-a)^n d\zeta$$

ここで二項目の級数を少し変える。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^{-(n+1)}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}f(\zeta)(\zeta-a)^n d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}(z-a)^{-n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta$$

さらにそれぞれの級数についている積分の部分はnに依存した係数として、

$$C_n\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_{Co}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\qquad C_{-n}\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}f(\zeta)(\zeta-a)^n d\zeta\qquad n=0,1,2,\cdots$$

※C_nは Taylor 展開の係数の様に書けるがあえてしない。

とおくと、結局

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{Co}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}(z-a)^{-n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C1}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta$$

$$\therefore\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(z-a)^{-n}$$ と出来る。

これを Lauent 展開という。(二項を別々に書いてあるのはC_0とC_1で区別している為)

Cauchy の積分公式を Cauchy の積分定理より説明したときに次の事がわかっていた。

$$\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{C0}\frac{f(z)}{z-a}dz-\oint_{C1}\frac{f(z)}{z-a}dz=0\quad\Rightarrow\quad\therefore\oint_{C0}\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{C1}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

これは全経路Cとほぼ同等の大きさを持つ経路C_0の周回積分とC_1での結果が等しいということであり、経路のとり方がこの結果に変化を与えないという事である。そこで今、経路C_0とC_1が一致するような経路C'を考えることが出来るので、Lauent 展開は

$$\therefore\ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-a)^n\qquad C_n\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

と表現される。特に$n=-1$とするとき

$$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'}f(\zeta)d\zeta\qquad \text{留数}\quad\oint_{C1}f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),a]\quad(\text{留数の所を参照})$$

となり、これは留数と同じ扱いが出来ることがわかる。確かに Lauent 展開から留数を考える事が出来るが、具体的な値を出す物では無いので出さなかった。しかし複素解析には必須な道具である。この他にも収束半径等の議論が必要な場合が出てくるかもしれないが、前半部分で出した複素積分についてはそのような問題はないので安心して欲しい。