

# フーリエ変換・ラプラス変換

まとめ

Fourier 級数展開 (周期  $2\pi$  の関数の場合)

$$f_{(x)} = C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

$$, \quad \begin{cases} C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{(x)} dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(x)} \sin(nx) dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(x)} \cos(nx) dx \end{cases}$$

Fourier 級数展開 (周期  $L$  の関数の場合)

$$f_{(x)} = C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \cos \frac{n\pi}{L} x)$$

$$, \quad \begin{cases} C = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_{(x)} dx \\ a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_{(x)} \sin(\frac{n\pi}{L} x) dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_{(x)} \cos(\frac{n\pi}{L} x) dx \end{cases}$$

Fourier 変換と逆変換

$$\begin{cases} g_{(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x)} e^{-i\omega x} dx & (\text{フーリエ変換}) \\ f_{(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_{(\omega)} e^{i\omega x} d\omega & (\text{フーリエ逆変換}) \end{cases}$$

Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |g(\omega)|^2 d\omega$$

Convolution 定理

フーリエ変換が  $G(\omega) = g_1(\omega) g_2(\omega)$  で、 $g_1(\omega), g_2(\omega)$  の逆フーリエ変換が  $f_1(\omega), f_2(\omega)$  である時、

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x-t) f_2(t)) dt$$

Laplace 変換と逆変換

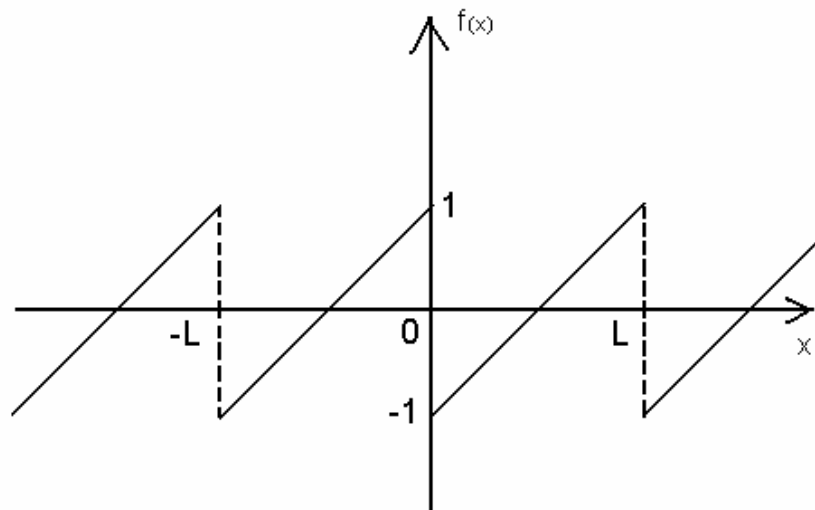
$$\begin{cases} F(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx & (\text{ラプラス変換}) \\ f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{sx} F(s) ds & (\text{ラプラス逆変換}) \end{cases}$$

Laplace 変換表

ラプラス空間	実空間
$\frac{1}{s}$	$1, u_{(t)}$
$\frac{1}{s^2}$	$t$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$t^n$
$\frac{1}{s \pm a}$	$e^{\mu at}$
$\frac{1}{s(s \pm a)}$	$\pm \frac{1}{a}(1 - e^{\mu at})$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh(at)$
$s X_{(s)} - x_{(0)}$	$\dot{x}_{(t)}$
$s^2 X_{(s)} - s x_{(0)} - \dot{x}_{(0)}$	$\ddot{x}_{(t)}$

## Fourier 級数展開

周期関数 ( $x$  の増加に伴って周期的な値を取る関数) は一般にどの様に表せるか考えてみたい。



周期が $L$ の関数の一例

まずは周期が  $2\pi$  の関数は一般にどの様に表せるか考えてみよう。つまり、 $f_{(x)} = f_{(x+2\pi)}$

( $x=0$  の時の値と  $x=2\pi$  の時の値が同じである) という関数  $f$  を探すクイズである。でも実は答えは簡単に見つかってしまう。答えはいくつかあって、

$$f_{(x)} = \sin x$$

$$f_{(x)} = \sin 2x$$

$$f_{(x)} = 2 \sin x$$

などがそうである。

もっと複雑な形を考えて、一般解を見つけよう。

$$f_{(x)} = \sin x + 3 \sin 2x - 2 \sin 3x + \dots$$

なども解になるので、 $f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$  とできる。 $n$  が負の場合を考えないのは、 $\sin(-x) = -\sin(x)$  という性質があるためである。さらに、 $\cos$  についても同様の議論を行える。なので  $f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$  も解である。これらを統合して

$$f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

さらに、 $x$  に関係のない定数がくっついていても  $f_{(x)} = f_{(x+2\pi)}$  の要求を満たすので

$$f_{(x)} = c + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

$n=0$  の時は  $x$  がいかなる値でも  $a_0 \sin 0 = 0$ 、 $b_0 \cos 0 = b_0$  という定数になるのでシグマの外に出して  $c$  と合併する。 $(n \neq 0$  の時は  $x$  の値によって変動するので  $\Sigma$  の外に出せない。)

$$\begin{aligned} f_{(x)} &= c + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \\ &= C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \end{aligned}$$

これが一般解であり、フーリエ級数展開と呼ばれている。ここから得られる大事な結論はいかなる周期  $2\pi$  の関数も  $\sin$  と  $\cos$  と定数の和で表現できるということである。

[Q1]  $f_{(x)} = C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$  の  $C, a_n, b_n$  を求めよ。

両辺を一周期の区間で積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_{(x)} dx &= \int_0^{2\pi} C dx + \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \right\} dx \\ &= \int_0^{2\pi} C dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} (a_n \sin nx + b_n \cos nx) dx \right\} \\ &= C[x]_0^{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \{0\} \\ &= 2\pi C \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{(x)} dx$$

両辺に  $\sin(mx)$  をかけて積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_{(x)} \sin(mx) dx &= \int_0^{2\pi} C \sin(mx) dx + \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx \sin mx + b_n \cos nx \sin mx) \right\} dx \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} (a_n \sin nx \sin nx + 0) dx \\ &= a_n \pi \end{aligned}$$

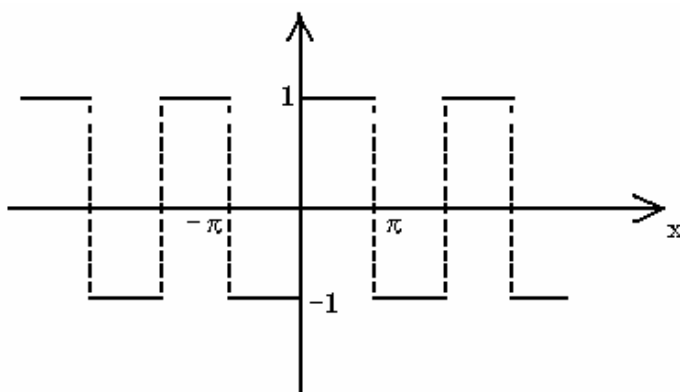
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(x)} \sin(mx) dx$$

同様に、 $\cos(mx)$  をかけて積分すると

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(x)} \cos(mx) dx$$

※  $\sin(nx)\cos(mx)$  の積分は、 $\sin$  が奇関数、 $\cos$  が偶関数なのでゼロになる。  
 $\sin(nx)\sin(mx)$ ,  $\cos(nx)\cos(mx)$  の積分は、積和変換で  $\cos$  になるためゼロだが、 $n=m$  の時だけは  $\cos$  の2倍角に帰着するため値が残る。いずれも計算してみればわかる。

**[Q2]** 下図の波をフーリエ級数展開せよ。



$$f_{(x)} = \begin{cases} +1 & (0 < x < \pi) \\ -1 & (-\pi < x < \pi) \end{cases}$$

周期  $2\pi$  の関数なので、以下の様に展開できる。

$$f_{(x)} = C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

$$\begin{cases} C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} \sin(nx) dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} \cos(nx) dx \end{cases}$$

もちろんこの式に代入して計算しても良いのだが、計算量を減らす工夫をしよう。

$C$  は  $f_{(x)}$  の振動中心を決める定数である。この問題における  $f_{(x)}$  は  $y=0$  を中心に振動して

いるので  $C=0$  である。また、 $f_{(x)}$  は奇関数であるからフーリエ展開も奇関数の  $\sin$  だけ

で構成されているはずである。以上より

$$f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} \sin(nx) dx$$



$$f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} \sin(nx) dx \quad \text{を計算してみよう。}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 f_{(x)} \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} f_{(x)} \sin(nx) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} (+1) \sin(nx) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{n} [\cos(nx)]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} [\cos(nx)]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ (1 - (-1)^n) - ((-1)^n - 1) \right\} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} & (n \text{が奇数の時}) \\ 0 & (n \text{が偶数の時}) \end{cases}$$

$$\text{以上より } f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$$

$f_{(x)}$  が連続な関数である時にはフーリエ級数展開で完璧に展開することが出来るが、 $f_{(x)}$  が不連続な関数であるときは、不連続点付近で近似の精度が落ちる。これは不連続関数を連続関数の重ね合わせで表現しようとすることに無理があるからである。この現象を **Gibbs** 現象という。これについては江端氏がまとめているのでそちらを参照のこと。

## Fourier 級数展開の拡張

フーリエ級数展開  $f_{(x)} = C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$  は周期が  $2\pi$  の関数にしか適用できなかった。これを拡張し、 $2\pi$  以外の周期の関数も扱えるようにしよう。つまり  $f_{(x)} = f_{(x+L)}$  を満たす関数を見つけるという問題である。

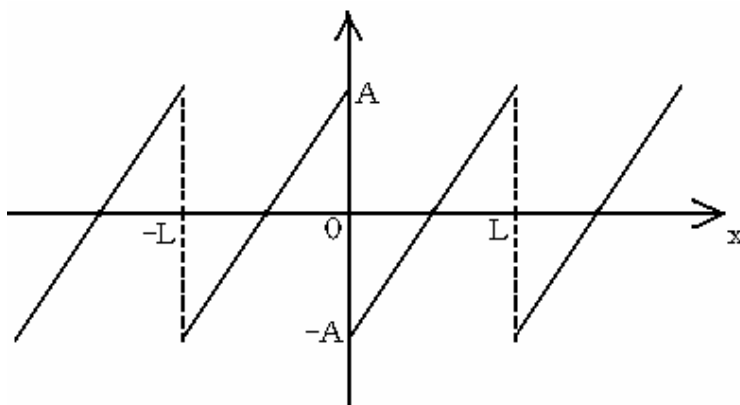
$$f_{(x)} = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

この関数は  $L \leq x \leq 2L$ ,  $2L \leq x \leq 3L$ ,  $\dots$  で同じ値を持つことが分かる。よってこれは要求を満たしている。 $(\sin(nx))$  の  $x$  を  $x\pi/L$  にしたと考えても良いだろう。) この  $f$  について先程と同様の議論を進めてゆけば

$$f_{(x)} = C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \cos \frac{n\pi}{L} x)$$

$$, \begin{cases} C = \frac{1}{2L} \int_0^L f_{(x)} dx \\ a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f_{(x)} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_0^L f_{(x)} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \end{cases}$$

**[Q3]** 下図の波をフーリエ級数展開せよ。



$$f_{(x)} = \frac{2A}{L}x - A \quad (0 < x < L)$$

周期  $2\pi$  の関数なので、以下の様に展開できる。

$$f_{(x)} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \cos \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$, \quad \begin{cases} C = \frac{1}{2L} \int_0^L f_{(x)} dx \\ a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f_{(x)} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_0^L f_{(x)} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \end{cases}$$

$C$  は  $f_{(x)}$  の振動中心を決める定数である。この問題における  $f_{(x)}$  は  $y=0$  を中心に振動して

いるので  $C=0$  である。また、 $f_{(x)}$  は奇関数であるからフーリエ展開も奇関数の  $\sin$  だけ

で構成されているはずである。以上より

$$f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad , \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f_{(x)} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad , \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f_{(x)} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad \text{を計算してみよう。}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_0^L f_{(x)} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \left\{ \int_0^L \left( \frac{2A}{L} x - A \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{L} \left\{ \frac{2A}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right\} - \frac{1}{L} \left\{ A \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right\} \\ &= \frac{2A}{L^2} \left\{ \left[ -\frac{L}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right\} + \frac{A}{n\pi} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right]_0^L \\ &= \frac{2A}{n\pi L} \left\{ (-L \cos(n\pi) + 0) + \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right\} + \frac{A}{n\pi} \{ \cos(n\pi) - 1 \} \\ &= -\frac{2A}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2A}{n\pi} \{0\} + \frac{A}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{A}{n\pi} \\ &= \frac{A}{n\pi} \{ -2 \cos(n\pi) + \cos(n\pi) - 1 \} \\ &= \begin{cases} 0 & (\text{nが奇数の時}) \\ -\frac{2AL}{n\pi} & (\text{nが偶数の時}) \end{cases} \end{aligned}$$

以上より  $f_{(x)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{AL}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{L} x$

## Fourier 級数展開の拡張 2

フーリエ級数展開  $f_{(x)} = C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \cos \frac{n\pi}{L} x)$  には  $\sin$  と  $\cos$  が含まれているので、これらを何とか指数関数で表したい。なぜなら指数関数のほうが取り扱い(微分など)が簡単だからである。オイラーの公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  を用いると

$$\begin{aligned}
 f_{(x)} &= C + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \cos \frac{n\pi}{L} x) \\
 &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left( \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i} \right) + b_n \left( \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} \right) \right\} \\
 &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2} i a_n \left( e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right) + \frac{1}{2} b_n \left( e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right) \right\} \\
 &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (b_n - i a_n) e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{1}{2} (b_n + i a_n) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right\} \\
 &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A e^{i\frac{n\pi}{L}x} + B e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right\}
 \end{aligned}$$

ここで  $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_{(x)} \cos(\frac{n\pi}{L} x) dx$  ,  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_{(x)} \sin(\frac{n\pi}{L} x) dx$  に注目すると、A と B の関係が見えてくる。 $a_n$  ,  $b_n$  を指数関数に変換してから A, B の標識に代入してみよう。

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx & a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\
&= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} dx & &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i} dx \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) (e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx & &= -\frac{i}{2L} \int_{-L}^L f(x) (e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(b_n - ia_n) &= \frac{1}{2} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) (e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx - \frac{1}{2} i \left( -\frac{i}{2L} \int_{-L}^L f(x) (e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx \right) \\
&= \frac{1}{4L} \left( \int_{-L}^L f(x) (e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x} - e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx \right) \\
&= \frac{1}{2L} \left( \int_{-L}^L f(x) (e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx \right) \\
&= C_n
\end{aligned}$$

カッコ内は積分なので、いかに  $x$  が変動しても最終的にただの数値になってしまう。そこで定数  $C$  として表すことにした。 $n$  が添えてあるのは  $n$  は一つの数字ではなく  $1, 2, 3, \dots$  という値を取るの、変数ではないにしろ気にしておきたいからである。同様にして

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(b_n + ia_n) &= \frac{1}{2} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) (e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx + \frac{1}{2} i \left( -\frac{i}{2L} \int_{-L}^L f(x) (e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx \right) \\
&= \frac{1}{4L} \left( \int_{-L}^L f(x) (e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x} + e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx \right) \\
&= \frac{1}{2L} \left( \int_{-L}^L f(x) (e^{i\frac{n\pi}{L}x}) dx \right) \\
&= C_{-n}
\end{aligned}$$

$C$  の添え字を  $\cdot n$  にしたのは、 $C_n$  で  $n$  の代わりに  $\cdot n$  を代入すると同じ値になるからである。

$$\begin{aligned}
 f_{(x)} &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + C_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right\} \\
 &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right\} \\
 &= \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\}
 \end{aligned}$$

ここで、 $C = a_0 + b_0 + \text{定数}$  だったので、 $C$  は  $\left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\}_{n=0}$  と表せないのではと思うかも

しれないが、定数部を  $a_0, b_0$  に吸収させたと考えれば、それでよい事が分かる。以上より

$$\begin{aligned}
 f_{(x)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\} \\
 C_n &= \frac{1}{2L} \left( \int_{-L}^L f_{(t)} (e^{-i\frac{n\pi}{L}t}) dt \right)
 \end{aligned}$$

これがフーリエ級数展開の指数関数（複素数）表示である。

$C_n$  の表式で  $x$  を  $t$  に変えたのは

$$f_{(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2L} \left( \int_{-L}^L f_{(x)} (e^{-i\frac{n\pi}{L}x}) dx \right) e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\}$$

これだと微小長さ  $dx$  が変動することになってしまう。そういう意味ではないので、違う文字において誤解を避けることにした。

**Fourier 級数展開の拡張 3**

フーリエ級数展開  $f_{(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\}$  ,  $C_n = \frac{1}{2L} \left( \int_{-L}^L f_{(t)} (e^{-i\frac{n\pi}{L}t}) dt \right)$  は周期が  $L$  で

ある関数について成り立つものであった。では  $L \rightarrow \infty$  (周期が $\infty$ ) の時はどのようになるか考えてみよう。周期が $\infty$ の関数と言うのは  $x$  を $-\infty$ から $+\infty$ まで変化させても 1 周期分しかない、よって周期関数でない関数ということになる。

まずは  $f_{(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\}$  で  $\frac{n\pi}{L} = \omega_n$  と置いてみる。

いま  $L \rightarrow \infty$  を考えているので、 $\omega_1 = \frac{\pi}{L}$  は超微少な値になる。しかし  $n$  については  $\Sigma$  があるので、この超微少な値の (2 倍を入れた時) + (3 倍を入れた時)  $\dots$  と  $-\infty$  倍から  $\infty$  倍までを足し合わせる。これはまさに  $d\omega = \frac{\pi}{L}$  の積分である。

$$\begin{aligned} f_{(x)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2L} \left( \int_{-L}^L f_{(t)} (e^{-i\frac{n\pi}{L}t}) dt \right) e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{L} \left( \int_{-L}^L f_{(t)} (e^{-i\frac{n\pi}{L}t}) dt \right) e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} d\omega (g_{(\omega_n)}) e^{i\omega_n x} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_{(\omega)} e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$



まとめると以下の様になる。

$$\begin{cases} f_{(x)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_{(\omega)} e^{i\omega x} d\omega \\ g_{(\omega)} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x)} e^{-i\omega x} dx \end{cases}$$

この、周期の無い関数にも適応できるフーリエ級数展開をフーリエ変換と呼ぶ。

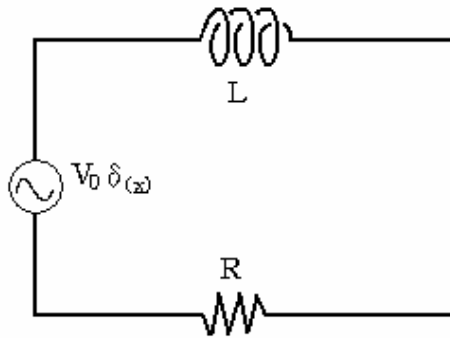
フーリエ変換は  $\int_{-\infty}^{\infty} |f_{(x)}|^2 dx$  が収束するものに行かない。収束しないと  $g$  が不定か発散になってしまうからである。この条件を  $L^2$  ノルム有界と言う。でも  $e^{-i\omega x}$  があるためどんな関数も収束するのでは？と思うかもしれないが、これは複素数であるため押さえにならない。

[Q4]  $f_{(t)} = \sin(kt)$  のフーリエ変換を求めよ。

フーリエ変換の式に代入すると

$$\begin{aligned}
 F_{(\omega)} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)} e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kt) \times e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \right) \times e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2i} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-\omega)t} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-k-\omega)t} d\omega \right) \\
 &= \frac{2\pi}{2i} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k-\omega)t}}{2\pi} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(-k-\omega)t}}{2\pi} d\omega \right) \\
 &= \frac{\pi}{i} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat}}{2\pi} da - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibt}}{2\pi} db \right) \\
 &= \frac{\pi}{i} (\delta_{(a)} - \delta_{(b)}) \\
 &= \frac{\pi}{i} (\delta_{(k-\omega)} - \delta_{(-k-\omega)}) \\
 &= \frac{\pi}{i} (\delta_{(k-\omega)} - \delta_{(k+\omega)})
 \end{aligned}$$

[Q5]  $L \frac{dI_{(t)}}{dt} + RI_{(t)} = V_0 \delta_{(t)}$  の特解を求めよ。



フーリエ逆変換を用いて

$$L \times \frac{d}{dt} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{(\omega)}}{2\pi} e^{i\omega t} d\omega \right) + R \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{(\omega)}}{2\pi} e^{i\omega t} d\omega \right) = V_0 \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta_{(\omega)}}{2\pi} e^{i\omega t} d\omega \right)$$

↓

$$\delta_{(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(t)} e^{-i\omega t} dt = 1$$

↓

$$i\omega L \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} I_{(\omega)} e^{i\omega t} dt \right) + R \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} I_{(\omega)} e^{i\omega t} dt \right) = V_0 \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \right)$$

$$i\omega L \times (I_{(\omega)} e^{i\omega t}) + R \times (I_{(\omega)} e^{i\omega t}) = V_0 \times (e^{i\omega t})$$

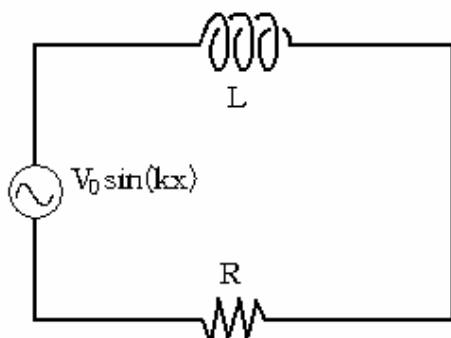
$$I_{(\omega)} = \frac{V_0}{R + i\omega L}$$

この  $I_{(\omega)}$  をフーリエ変換の式に代入して

$$\begin{aligned} I_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{(\omega)}}{2\pi} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{V_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{V_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{R + i\omega L} d\omega \end{aligned}$$

あとは複素積分を行えば  $I_{(t)} = \frac{V_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$  という解（特解）が求まる。

[Q6]  $L \frac{dI_{(t)}}{dt} + RI_{(t)} = V_0 \sin(kx)$  の特解を求めよ。



フーリエ逆変換を用いて

$$L \times \frac{d}{dt} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{(\omega)}}{2\pi} e^{i\omega t} dt \right) + R \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{(\omega)}}{2\pi} e^{i\omega t} dt \right) = V_0 \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{i} (\delta_{(k-\omega)} - \delta_{(k+\omega)}) e^{i\omega t} dt \right)$$

$$i\omega L \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} I_{(\omega)} e^{i\omega t} dt \right) + R \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} I_{(\omega)} e^{i\omega t} dt \right) = V_0 \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{i} (\delta_{(k-\omega)} - \delta_{(k+\omega)}) e^{i\omega t} dt \right)$$

$$i\omega L \times I_{(\omega)} + R \times I_{(\omega)} = V_0 \frac{\pi}{i} (\delta_{(k-\omega)} - \delta_{(k+\omega)})$$

$$I_{(\omega)} = \frac{1}{R + i\omega L} \frac{V_0 \pi}{i} (\delta_{(k-\omega)} - \delta_{(k+\omega)})$$

$$I_{(\omega)} = \frac{V_0 \pi}{-\omega L + iR} (\delta_{(k-\omega)} - \delta_{(k+\omega)})$$

この  $I_{(\omega)}$  をフーリエ変換の式に代入して

$$\begin{aligned}
 I_{(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{(\omega)}}{2\pi} e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{V_0\pi}{-\omega L + iR} (\delta_{(k-\omega)} - \delta_{(k+\omega)}) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{V_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{i\omega t}}{-\omega L + iR} \delta_{(k-\omega)} - \frac{e^{i\omega t}}{-\omega L + iR} \delta_{(k+\omega)} \right) d\omega \\
 &= \frac{V_0}{2} \left( \frac{e^{ikt}}{-kL + iR} - \frac{e^{-ikt}}{kL + iR} \right) \\
 &= \frac{V_0}{2} \left( \frac{(iR + kL)e^{ikt} - (iR - kL)e^{-ikt}}{(iR - kL)(iR + kL)} \right) \\
 &= \frac{V_0}{2} \left( \frac{(iR + kL)(\cos kt + i \sin kt) - (iR - kL)(\cos kt - i \sin kt)}{-R^2 - k^2 L^2} \right) \\
 &= \frac{V_0}{2(R^2 + k^2 L^2)} \{ 2(R \sin kt - kL \cos kt) \} \\
 &= \frac{V_0}{(R^2 + k^2 L^2)} \left\{ \sqrt{R^2 + k^2 L^2} \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + k^2 L^2}} \sin kt - \frac{kL}{\sqrt{R^2 + k^2 L^2}} \cos kt \right) \right\} \\
 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + k^2 L^2}} \sin(kt - \phi)
 \end{aligned}$$

以上より  $I_{(t)} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + k^2 L^2}} \sin(kt - \phi)$  と解 (特解) が求まる。



まとめると、

任意の点  $P$  を色々な座標でみることができる。座標にはいくつか種類があり、直交座標（三次元）、極座標（三次元）、円筒座標（三次元）、フーリエ空間（無限次元）などが存在する・・・ということである。これは  $P$  をどの様な物差しで測るかということ、 $P$  自体は何も変わっていない。

$$P_{(x,y,z)} = P_{(r,\theta,\phi)} = P_{(r,\theta,z)} = P_{(\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots)}$$



Parseval の等式

いま、関数  $f$  の値  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$  を計算をしてみよう。

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega \right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{itx} dt \right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} g^*(\omega) g(t) e^{ix(t-\omega)} d\omega dt \right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} g^*(\omega) g(t) e^{ix(t-\omega)} d\omega dt \right) dx
 \end{aligned}$$

積分の順序は自由であること、またデルタ関数の定義  $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dy$  にも注目すると

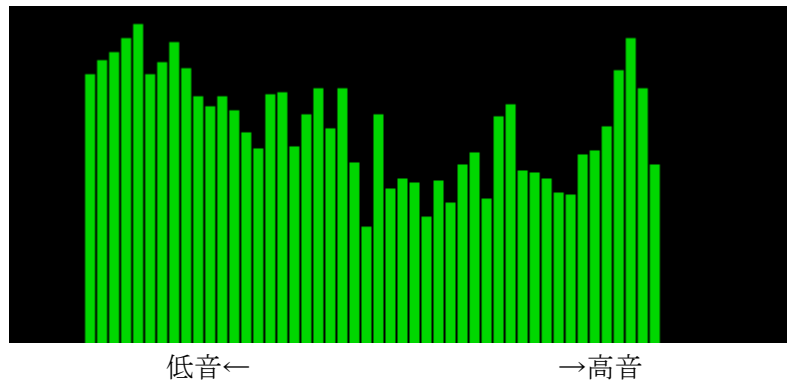
$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} g^*(\omega) g(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{ix(t-\omega)} dx \right) d\omega dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} g^*(\omega) g(t) (\delta_{(t-\omega)}) d\omega dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} g^*(\omega) g(\omega) d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |g(\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

この結果は当然である。なぜなら実空間とフーリエ空間は、ある関数  $f$  をどの座標でみているかという違いなので、実空間での値とフーリエ空間での値が変わってはならない。これを「パーセバルの等式」と呼ぶ。

音波を使ってパーセバルの等式を直感的に説明してみよう。

スピーカーから音が出ており、その音量が 10db の音量で聞こえた。

フーリエ変換するとスピーカーからの音は 10kHz と 100kHz と 1000kHz で構成されていることが分かった。スピーカーからその 3つの波が別々に出ているとして、それらの音量の和を求めたとしても、それは 10db でなければならない。



カーステレオなどに付いているアレ

**Convolution 定理 (畳み込み積分)**

フーリエ変換が  $G_{(\omega)} = e^{\omega} \sin \omega$  である時、もとの関数  $F_{(x)}$  は  $e^{\omega}$  の逆フーリエ変換と  $\sin \omega$  の逆フーリエ変換の積になるのでは・・・と思う。もしそうなら計算が随分楽になる。これが本当に成り立つのか一般的にチェックしてみよう。

$$\begin{aligned}
 G_{(\omega)} &= g_{1(\omega)} g_{2(\omega)} \\
 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{1(x)} e^{-i\omega x} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{2(x)} e^{-i\omega x} dx \right) \\
 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{1(x)} e^{-i\omega x} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{2(t)} e^{-i\omega t} dt \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{1(x)} f_{2(t)} e^{-i\omega(x+t)} dx \right) dt
 \end{aligned}$$

ここで、 $x+t=y$  と置くと

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{1(y-t)} f_{2(t)} e^{-i\omega y} dy \right) dt \\
 G_{(\omega)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{1(y-t)} f_{2(t)} e^{-i\omega y} dy \right) dt \\
 \int_{-\infty}^{\infty} F_{(x)} e^{-i\omega x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{1(y-t)} f_{2(t)} e^{-i\omega y} dy \right) dt \\
 \int_{-\infty}^{\infty} F_{(y)} e^{-i\omega y} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{1(y-t)} f_{2(t)} e^{-i\omega y} dy \right) dt \\
 F_{(y)} e^{-i\omega y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( f_{1(y-t)} f_{2(t)} e^{-i\omega y} \right) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{(y)} e^{-i\omega y} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_{1(y-t)} f_{2(t)} e^{-i\omega y}) dt \\
F_{(y)} e^{-i\omega y} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_{1(y-t)} f_{2(t)}) dt \cdot e^{-i\omega y} \\
F_{(y)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_{1(y-t)} f_{2(t)}) dt \\
F_{(x)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_{1(x-t)} f_{2(t)}) dt
\end{aligned}$$

以上より、 $G_{(\omega)} = g_{1(\omega)} g_{2(\omega)}$  で、 $G_{(\omega)}$ ,  $g_{1(\omega)}$ ,  $g_{2(\omega)}$  の個々の逆フーリエ変換が

$F_{(\omega)}$ ,  $f_{1(\omega)}$ ,  $f_{2(\omega)}$  である時、 $F_{(x)} = f_{1(x)} f_{2(x)}$  は成り立たず

$$F_{(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} (f_{1(x-t)} f_{2(t)}) dt$$

となる。これをコンボリューション定理と呼ぶ。

## Laplace 変換

フーリエ変換は  $L^2$  ノルム有界な関数についてしか行えなかった。これを何とか改良して、どんな関数でも行えるようにしたい。

いま、 $L^2$  ノルム有界を満たさない関数  $f_{(x)}$  があるとする。これを無理矢理収束させるには

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x)} e^{-ax} dx$$

一見解決できたかに見えるが、これでは  $+\infty$  の時は収束しても、 $-\infty$  の時が収束しない。

$$\int_0^{\infty} f_{(x)} e^{-ax} dx$$

これで解決する。しかしフーリエ変換の定義は  $-\infty$  から  $+\infty$  なので、なんとか積分領域を伸ばしたい。そこで、ステップ関数  $\theta$  ( $x < 0$  で 0、 $0 < x$  で 1) をかける。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_{(x)} f_{(x)} e^{-ax} dx$$

これで積分領域を保ちつつ収束させることに成功した。ではフーリエ変換してみよう。

$$\begin{aligned} g_{(\omega)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{(x)} f_{(x)} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{(x)} f_{(x)} e^{-(a+i\omega)x} dx \\ &= \int_0^{\infty} f_{(x)} e^{-(a+i\omega)x} dx \end{aligned}$$

$$g_{(\omega)} = \int_0^{\infty} f_{(x)} e^{-(a+i\omega)x} dx$$

ここで  $a+i\omega=s$  と置き換えると

$$F_{(s)} = \int_0^{\infty} f_{(x)} e^{-sx} dx$$

これをラプラス変換と呼ぶ。

フーリエ逆変換は

$$\begin{aligned} \theta_{(x)} e^{-ax} f_{(x)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{(\omega)} e^{i\omega x} d\omega \\ e^{-ax} f_{(x)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{(\omega)} e^{i\omega x} d\omega \quad (0 < x) \\ e^{-ax} f_{(x)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{(\omega)} e^{(s-a)x} d\omega \\ e^{-ax} f_{(x)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F_{(s)} e^{-ax} e^{sx} ds \\ f_{(x)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{sx} F_{(s)} ds \end{aligned}$$

これがラプラス逆変換である。

微分方程式の Laplace 変換による解法

ラプラス変換の値を覚えておくと、非常に鮮やかに微分方程式を解くことが出来る。  
物理問題で現れやすいラプラス変換を書き出しておく

ラプラス空間	実空間
$\frac{1}{s}$	$1, u_{(t)}$
$\frac{1}{s^2}$	$t$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$t^n$
$\frac{1}{s \pm a}$	$e^{\mu at}$
$\frac{1}{s(s \pm a)}$	$\pm \frac{1}{a}(1 - e^{\mu at})$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh(at)$

これらはもちろん定義に従って計算すれば求まるのだが、これらを暗記するかもしくは割り切って公式集を見るのがミソである。これから続く問題を見てみればそれがわかるだろう。

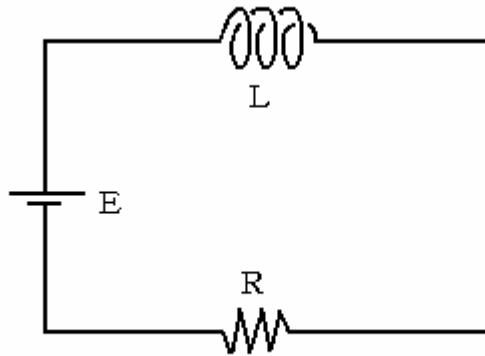
[Q7]  $\dot{x}_{(t)}$ ,  $\ddot{x}_{(t)}$  のラプラス変換を求めよ。

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{(s)} &= \int_0^{\infty} \dot{x}_{(t)} e^{-st} dt \\
 &= \left[ x_{(t)} e^{-st} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x_{(t)} e^{-st} dt \\
 &= (0 - x_{(0)}) + s \int_0^{\infty} x_{(t)} e^{-st} dt \\
 &= (0 - x_{(0)}) + sX_{(s)} \\
 &= sX_{(s)} - x_{(0)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{X}_{(s)} &= \int_0^{\infty} \ddot{x}_{(t)} e^{-st} dt \\
 &= \left[ \dot{x}_{(t)} e^{-st} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \dot{x}_{(t)} e^{-st} dt \\
 &= (0 - \dot{x}_{(0)}) + s \int_0^{\infty} \dot{x}_{(t)} e^{-st} dt \\
 &= s \dot{X}_{(s)} - \dot{x}_{(0)} \\
 &= s(sX_{(s)} - x_{(0)}) - \dot{x}_{(0)} \\
 &= s^2 X_{(s)} - sx_{(0)} - \dot{x}_{(0)}
 \end{aligned}$$



[Q8]  $L \frac{di}{dt} + Ri = E$  ( $i_{(0)} = 0$ ) を解け。



両辺をラプラス変換して

$$L(sI_{(s)} - i_{(0)}) + RI_{(s)} = E \frac{1}{s}$$

$$L(sI_{(s)} - 0) + RI_{(s)} = E \frac{1}{s}$$

$$(Ls + R)I_{(s)} = E \frac{1}{s}$$

$$I_{(s)} = \frac{E}{s(Ls + R)}$$

$$I_{(s)} = \frac{E}{L} \left( \frac{1}{s(s + \frac{R}{L})} \right)$$

ラプラス変換表と見比べれば

$$\begin{aligned} i_{(t)} &= \frac{E}{L} \cdot \frac{L}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \\ &= \frac{L}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \end{aligned}$$

$$[Q9] \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 4e^{2t} \quad (x_{(0)} = -3, \dot{x}_{(0)} = 5) \text{ を解け。}$$

両辺をラプラス変換して

$$\begin{aligned} \left\{ s^2 X_{(s)} - sx_{(0)} - \dot{x}_{(0)} \right\} - 3\{sX_{(s)} - x_{(0)}\} + 2X_{(s)} &= 4 \cdot \frac{1}{s-2} \\ \left\{ s^2 X_{(s)} - 3s - 5 \right\} - 3sX_{(s)} - 9 + 2X_{(s)} &= 4 \cdot \frac{1}{s-2} \\ (s^2 - 3s + 2)X_{(s)} + 3s - 14 &= 4 \cdot \frac{1}{s-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{(s)} &= \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \left\{ \frac{4}{s-2} + (-3+14) \right\} \\ &= \frac{1}{(s-2)(s-1)} \cdot \frac{3s^2 + 20s - 24}{s-2} \\ &= \frac{3s^2 + 20s - 24}{(s-2)^2(s-1)} \\ &= -\frac{7}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} \end{aligned}$$

ラプラス変換表と見比べれば

$$x_{(t)} = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

※ もちろんラプラス逆変換を真面目に計算してもよいのだが、そうすると複素積分が出てくるために計算が大変で、普通に解くのと労力が変わらなくなってしまう。

$$[\text{Q10}] \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = e^{-t} \sin t \quad (x_{(0)} = 0, \dot{x}_{(0)} = 1) \quad \text{を解け。}$$

両辺をラプラス変換して

$$\begin{aligned} \left\{ s^2 X_{(s)} - s x_{(0)} - \dot{x}_{(0)} \right\} + 2 \left\{ s X_{(s)} - x_{(0)} \right\} + 5 X_{(s)} &= \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} \sin t \, dt \\ \left\{ s^2 X_{(s)} - 0s - 1 \right\} - 2s X_{(s)} - 0 + 5 X_{(s)} &= \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \\ (s^2 + 2s + 5) X_{(s)} - 1 &= \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{(s)} &= \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(s+1)^2 + 4} \end{aligned}$$

ラプラス変換表と見比べれば

$$\begin{aligned} x_{(t)} &= \frac{1}{3} e^{-t} \sin t + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \\ &= \frac{1}{3} e^{-t} (\sin t + \sin 2t) \end{aligned}$$

$$\text{[Q11]} \quad \begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 4y = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 2y = 0 \end{cases} \quad (t=0 \text{で } x=1, y=-1) \text{ を解け。}$$

初期条件に気を付けつつ 2 式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases} 2(sX_{(s)} - 1) + (sY_{(s)} - (-1)) - 3X_{(s)} - 4Y_{(s)} = 0 \\ (sX_{(s)} - 1) + (sY_{(s)} - (-1)) - X_{(s)} - 2Y_{(s)} = 0 \end{cases}$$

簡単な連立方程式になったので、 $X$  と  $Y$  についてまとめる。

$$\begin{cases} X_{(s)} = \frac{1}{(s-1)^2 + 1} \\ Y_{(s)} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} \end{cases}$$

ラプラス逆変換を用いれば、解が求まる。

$$\begin{cases} x_{(t)} = e^t (\cos(t) - \sin(t)) \\ y_{(t)} = -e^t \cos(t) \end{cases}$$

## Fourier / Laplace 変換 まとめ

フーリエ変換は初期条件を考慮せずに用いることができ、方程式の特別解を得ることが出来る。ラプラス変換は初期条件無しに用いることはできず、方程式の一般解を得ることが出来る。

両変換の数学的な有用性は、微分方程式を代数方程式に変換することによって計算を簡単にできることにあるが、物理的な有用性はどう説明されるのだろうか？

フーリエ変換は初期条件によらない解を導くが、これは与えられた系の初期条件によらない状態（定常状態）が得られているということである。一方でラプラス変換は初期値による解、つまり定常的でない状態が得られる。二つの変換は異なるコンセプトで用いるもので、決して「フーリエ変換を便利にしたのがラプラス変換」では無いのである。

物理問題は大別して「定常状態を探る問題」と「初期値問題」の2つに分けられる。よって、与えられた問題がどちらを聞いているのかを見極める力があれば、自ずとどちらの変換を使うべきかが見えてくるのである。

## [参考文献]

- マグロウヒル大学演習シリーズ「フーリエ解析」  
Murry R. Spiegel 著 中野寛 訳 オーム社
- マグロウヒル大学演習シリーズ「ラプラス変換」  
Murry R. Spiegel 著 中野寛 訳 オーム社
- 「使える数学 フーリエ変換・ラプラス変換」  
楠田信・平居孝之・福田亮治 著 共立出版株式会社
  
- 物理数学 2 のテキストとノート
- 物理数学演習のテキストとノート
- 江端修一郎氏のまとめノート

Takashi Inoue

<http://www.persianblue.net>