補足(Gibbs 現象)

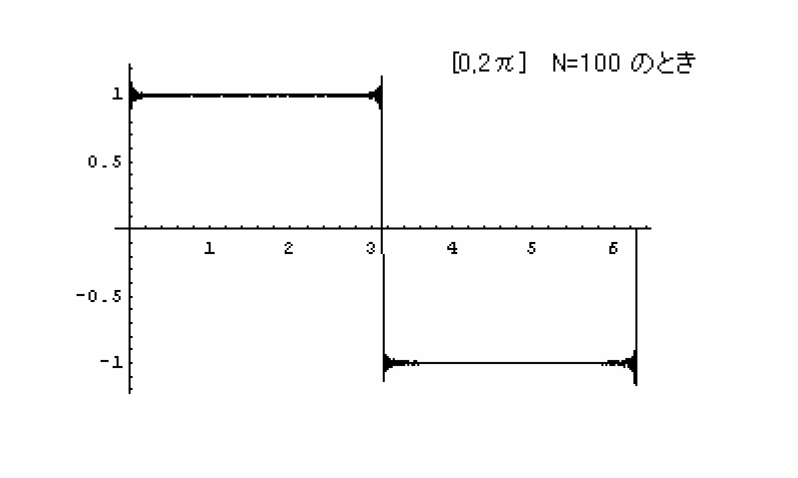
{①ギブス現象の出現とその数値関係　②数学的な側面　③ギブス現象による問題とは？}

①ギブス現象の出現とその数値関係

例１《ギブス現象の出現》

$$f(x)=\begin{cases}1 & (0\le x\le \pi)\\ -1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$ をフーリエ級数展開すると

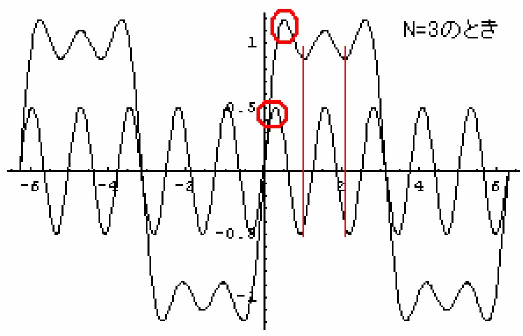
$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{(2m-1)}\mathrm{Sin}\{(2m-1)x\}\qquad (N\to\infty)$$ となる。これを図に示すと

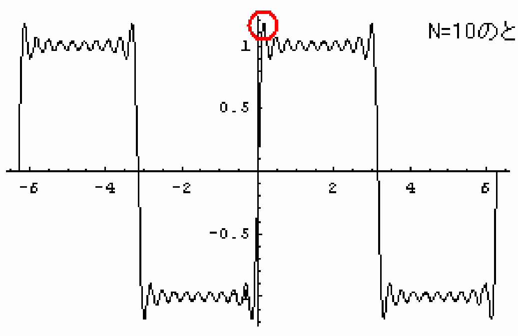


$f(x)$は 0、π、、、で不連続である。図を見てわかるように１、－１の値であるはずのところがトゲのように少し立っている。これはいくら項数を増やしていってもなくならない。

この現象をギブス(Gibbs)現象もしくはオーバーシュートと呼ぶ。
トゲの部分がどれほど伸びているのか数値を出してみる

有限の N において最後に残る凸凹はその時、最小幅の Sin が主な原因である。この Sin 以前の Sin（N－1 項目の Sin）は $f(x)$の形状を作っている。そこでトゲの位置をこの Sin の幅で表すことを考える。今 N=3 の $f(x)$と分割数に応じた周期を持つ Sin を重ねてみると、山の部分が少しずれている。当然、様々な周期幅の Sin で近似しているためである。
ここで N を大きくした場合、近似的に同じ周期幅を持つとみなせば山から山までの幅⊿T は次のように考えられる。





f(x)の周期をTとし、近似したSinの数をNとすると⊿Tは

$\triangle T = T/N$ 　である。不連続点から⊿Tの半分だけ足すか、引くか、によって山の頂点近傍のXを表すことが出来る。⊿Tの半分を⊿Xとする。例1において注意すべき点を挙げておくと、例1のフーリエ級数を見ると、奇数番目の値をとっている。つまり実際はその倍の Sinで作られているので、$N' = 2N$ としなければならない。故に⊿XはN=100、T=2πのとき

$$\triangle X = \left(\frac{T}{N'}\right)\frac{1}{2} = \left(\frac{2\pi}{200}\right)\frac{1}{2} = \frac{\pi}{200}$$

である。

これをもとにN=5～1000までX＝0＋⊿Xにおける**f**(x)を出してみると以下の結果になる。

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{5}\frac{1}{(2m-1)}\mathrm{Sin}\left[(2m-1)\frac{\pi}{10}\right]$$

1.18233

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{10}\frac{1}{(2m-1)}\mathrm{Sin}\left[(2m-1)\frac{\pi}{20}\right]$$

1.17981

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{100}\frac{1}{(2m-1)}\mathrm{Sin}\left[(2m-1)\frac{\pi}{200}\right]$$

1.17899

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{1000}\frac{1}{(2m-1)}\mathrm{Sin}\left[(2m-1)\frac{\pi}{2000}\right]$$

1.17898

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{1000}\frac{1}{(2m-1)}\mathrm{Sin}\left[(2m-1)\frac{-\pi}{2000}\right]$$

-1.17898

左の結果とX＝0のときの値を比べて見ると
大体17～18%の伸びが見られる。
フーリエ級数展開を不連続な点を含む式に対して行うとき、数学的には、**f**(x＋0)，**f**(x－0)の極限値が存在し、

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

となる。
結果からも実際

$$f(0) = \frac{f(0+\triangle x) + f(0-\triangle x)}{2} \to 0 \quad (\triangle x \to 0)$$

がわかる。

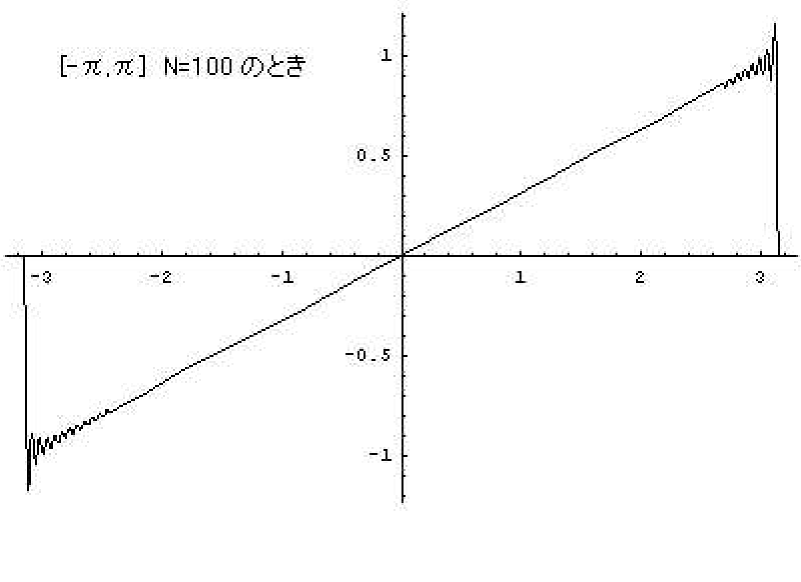
ほかの形状のものはどうなっているのか同様にして鋸波を例に考えてみる。

例2《形状が異なるものは？》

$f(x) = x/\pi \quad (-\pi \le x \le \pi)$ 　　これをフーリエ級数展開すると

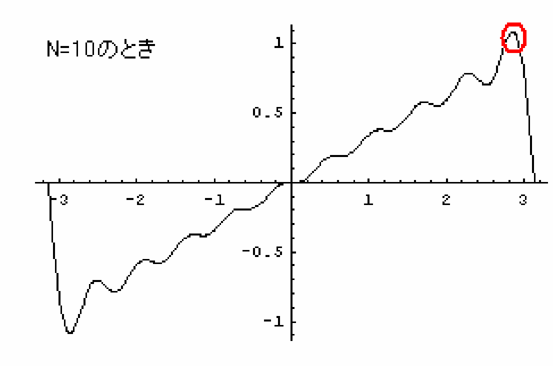
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{2(-1)^{(n+1)}}{n}\mathrm{Sin}[nx] \qquad (N \to \infty)$$

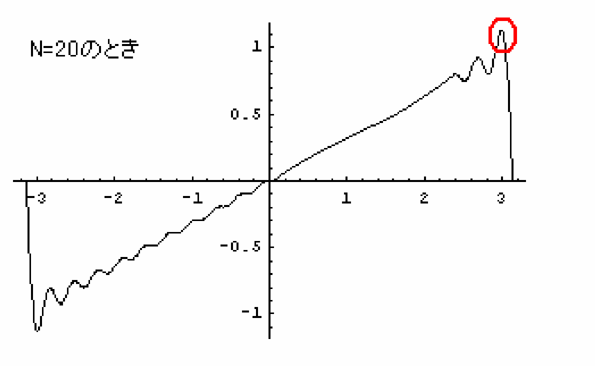
となる。これを図に示すと、



πにおけるギブス現象を調べる。

例１のときと同様に N を大きくして近似的に考える。





例 2 のフーリエ級数の N と、近似した Sin の数は等しいので、そのままの N で考えられる。

⊿X の値は N=100、　T＝2πでは

$$⊿X=\left(\frac{T}{N}\right)\frac{1}{2}=\left(\frac{2\pi}{100}\right)\frac{1}{2}=\frac{\pi}{100}$$　である。

これをもとに N=5～10000 までの X＝π－⊿X における値を出してみる。

（⊿X だとマイナスの部分が出てくる）

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{5}\frac{2(-1)^{\wedge}(m+1)}{m}\,\mathrm{Sin}\left[m*\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

0.972296

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{10}\frac{2(-1)^{\wedge}(m+1)}{m}\,\mathrm{Sin}\left[m*\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)\right]$$

1.07731

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{100}\frac{2(-1)^{\wedge}(m+1)}{m}\,\mathrm{Sin}\left[m*\left(\pi-\frac{\pi}{100}\right)\right]$$

1.16896

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{1000}\frac{2(-1)^{\wedge}(m+1)}{m}\,\mathrm{Sin}\left[m*\left(\pi-\frac{\pi}{1000}\right)\right]$$

1.17798

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{10000}\frac{2(-1)^{\wedge}(m+1)}{m}\,\mathrm{Sin}\left[m*\left(\pi-\frac{\pi}{10000}\right)\right]$$

1.17888

左のような結果となった。
N＝5，10 くらいではよく近似していないのであまり参考にならない。
N＝1000, 10000 あたりでは収束の様子がうかがえる。
例 2 も 17～18%の伸びを示している。
(N が大きい値において近似的に⊿T の幅は同じであるとした。)

すべてのギブス現象がこの伸び率なのだろうか？
今まで不連続点における落差が「２」のときで周期２πのフーリエ級数展開についてしか述べなかった。
不連続点を落差と周期を変えたもので調べてみることにしよう。

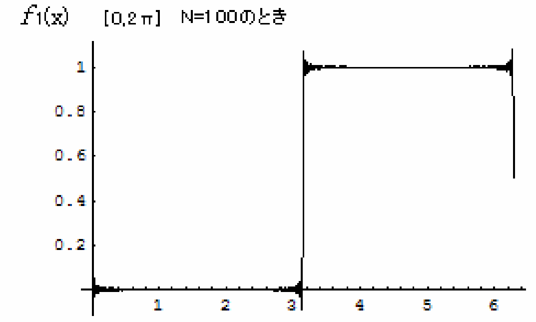
例３《落差、周期は伸びに対し関係があるのか？》

$f_1(x)=\begin{cases}0 & (0\le x\le \pi)\\ 1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$　　$f_2(x)=\begin{cases}0 & (0\le x\le 1)\\ 1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$ をそれぞれフーリエ級数展開すると、

$$f_1(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{2m-1}\mathrm{Sin}[(2m-1)x]$$
$$f_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{2m-1}\mathrm{Sin}[(2m-1)\pi x]$$

$(N\to\infty)$　　となる。

それぞれの図と伸びの結果を記すと、

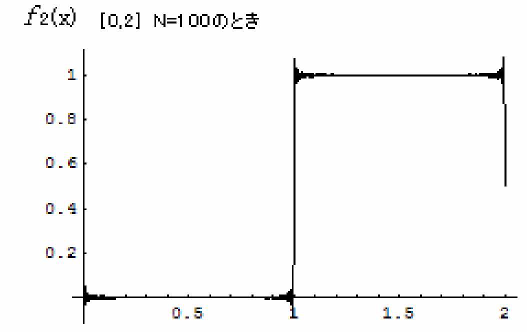


$$\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{100}\frac{1}{2m-1}\mathrm{Sin}\left[(2m-1)*\left(\pi+\frac{\pi}{200}\right)\right]$$

1.08949

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{1000}\frac{1}{2m-1}\mathrm{Sin}\left[(2m-1)*\left(\pi+\frac{\pi}{2000}\right)\right]$$

1.08949



$$\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{100}\frac{1}{2m-1}\mathrm{Sin}\left[(2m-1)*\pi*\left(1+\frac{1}{200}\right)\right]$$

1.08949

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{1000}\frac{1}{2m-1}\mathrm{Sin}\left[(2m-1)*\pi*\left(1+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

1.08949

例１、例２とは異なりトゲの伸びは８～９％程度となった。
結果からもわかるように、周期ではなくその落差によっているようだ。
ギブス現象の伸びについて数値の側面についてある程度わかったと思う。
しかし疑問に残るのは「何故、上のような結果が出てくるのか？」だと思う。
また、いままでの計算は「数値実験」といった感じの検証であった。⊿Xの導出の仕方は少し乱暴なような気がする。次は少し数式をいじった方法でこの結果を考えてみたいと思う。
この方法を用いるためにはフーリエ級数の成立条件に触れねばならない。

②数学的な側面からのギブス現象

まずこのギブス現象が起こるそもそもの理由は何であろうか。
感覚的にこの理由は簡単で、「不連続な関数に対して連続関数で近似するから」である。すなわち不連続点におけるフーリエ級数が一様収束する条件を満たしているかどうかという問題であり、これを説明するには収束する、しないの数学が必要になるはずである。フーリエ級数展開式が一般の関数式に収束するかどうかは展開する前にその関数がディリクレ条件を満たす必要があることを忘れてはならない。この時点でフーリエ級数がその関数に一様収束していることを数学は約束している。
しかしながらギブス現象が起きている。なぜであろうか？ここで考えられるのは「近似」という言葉である。「数学的」にはフーリエ級数は**無限**級数であるとき、展開がディリクレ条件を満たすのである。つまり**有限**のフーリエ級数では**完全な収束**には至っていず「近似」という言葉になり、ギブス現象が起きているのである。数式で書けば

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(x)=\sum_{m=1}^{N}u_m(x)+\sum_{m=N+1}^{\infty}u_m(x) \qquad u_m(x)\text{ はフーリエ級数の代用}$$

有限のフーリエ級数展開式では右の項は出てこないわけである。

さて数式をいじって例１のような結果を示そう。まずフーリエ級数が**無限**級数であるとき項別積分、項別微分が可能であることを述べておく。
区間[a,b]において連続な $f(x)$ に**無限**級数 $\sum_{n}^{\infty}u_n(x)$ が一様収束するとき

$$\int_a^b\left\{\sum_{n}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx \qquad \frac{d}{dx}\sum_{n}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x) \qquad \text{を満たす。}$$

例１の式を用いて式展開を行う。ここで一般性を高めるため周期を T としておく。

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\mathrm{Sin}[2\pi\frac{2m-1}{T}x] \quad \text{である。部分和をとって変形させていく。}$$

$$f_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\mathrm{Sin}[2\pi\frac{2m-1}{T}x]=\frac{4}{T\pi}\sum_{m=1}^{n}\frac{T}{2m-1}\mathrm{Sin}[2\pi\frac{2m-1}{T}x]$$

$$=\frac{8}{T}\sum_{m=1}^{n}\int_0^x\mathrm{Cos}[2\pi\frac{2m-1}{T}t]dt=\frac{8}{T}\int_0^x\sum_{m=1}^{n}\mathrm{Cos}[2\pi\frac{2m-1}{T}t]dt$$

さらに $S_n=\sum_{m=1}^{n}\mathrm{Cos}[2\pi\frac{2m-1}{T}t]$ とおき両辺に $\mathrm{Sin}[2\pi\frac{1}{T}t]$ を掛けて変形を行う。

$$S_n\mathrm{Sin}[2\pi\frac{1}{T}t]=\sum_{m=1}^{n}\left\{\mathrm{Sin}[2\pi\frac{1}{T}t]\mathrm{Cos}[2\pi\frac{2m-1}{T}t]\right\}$$

$$\mathrm{Sin}[2\pi\frac{1}{T}t]\mathrm{Cos}[2\pi\frac{2m-1}{T}t]=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Sin}[2\pi\frac{2m}{T}t]-\mathrm{Sin}[2\pi\frac{2m-2}{T}t]\right] \quad \text{を用いれば、}$$

$$2S_n \mathrm{Sin}[2\pi \frac{1}{T} t] = \mathrm{Sin}[2\pi \frac{2}{T} t] - \mathrm{Sin}[2\pi \frac{0}{T} t] + \mathrm{Sin}[2\pi \frac{4}{T} t] - \mathrm{Sin}[2\pi \frac{2}{T} t] + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$= \mathrm{Sin}[2\pi \frac{2n}{T} t] \qquad \therefore S_n = \frac{1}{2}\left\{ \mathrm{Sin}[2\pi \frac{2n}{T} t] \Big/ \mathrm{Sin}[2\pi \frac{1}{T} t] \right\}$$

となるから、

$$f_n(x) = \frac{4}{T}\int_0^x \left\{ \mathrm{Sin}[2\pi \frac{2n}{T} t] \Big/ \mathrm{Sin}[2\pi \frac{1}{T} t] \right\} dt$$ とできる。

$f_n(x)$が極大、極小の値をとる x は $\frac{d}{dx} f_n(x) = 0$ を満たすものであるから、

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{4}{T}\left\{ \mathrm{Sin}[2\pi \frac{2n}{T} x] \Big/ \mathrm{Sin}[2\pi \frac{1}{T} x] \right\} = 0$$ を満たす x は

$$x = \frac{kT}{4n} \qquad (k = 1,2,3,,,,n)$$ と n 個存在する。いま k が奇数のとき極大値をとるから

最大の極大値は k=1 のときの値であり、次の式で表せる。

$$f_n\left(\frac{T}{4n}\right) = \frac{4}{T}\int_0^{T/4n} \left\{ \mathrm{Sin}[2\pi \frac{2n}{T} t] \Big/ \mathrm{Sin}[2\pi \frac{1}{T} t] \right\} dt \qquad u = 2\pi \frac{2n}{T} t$$ の変数変換を行うと

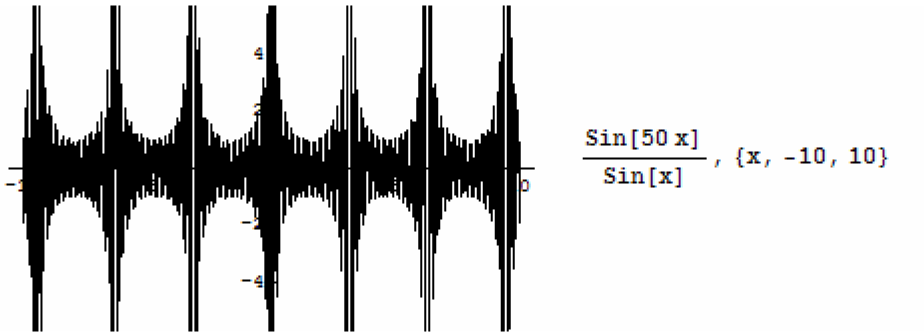
$$f_n\left(\frac{T}{4n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Sin}[u]}{u} \frac{u/2n}{\mathrm{Sin}[u/2n]} du$$ さらに n を無限に大きくしたとき簡単になり

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{T}{4n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Sin}[u]}{u} du$$ となりこの値は例１で示した値と同様の結果を得る。

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Sin}[x]}{x} dx = 1.17898$$

しかし、$n \to \infty$ となるとき x は無限小となりこの効果はなくなる。

例１について数式の展開を行ったが一般のフーリエ級数展開式にも成り立つ。この場合を検証したいときは複素フーリエ級数展開式を用いて行うとうまくできる。例１の式展開の途中で出てきた $S_n(x)$ はディリクレ核と呼ばれる項である。図で書くと次のようになる。



③ギブス現象による問題とは？

この現象は情報工学の分野において一つの問題のようである。

アナログの情報をデジタルに変換する際、アナログの情報では多すぎるためサンプリングを行う。そのサンプリングからもとの情報に直すためにフーリエ展開を利用する。そのときにギブス現象が起きて、もとの情報に直らないことがある。この時「窓関数」と呼ばれる関数を用いてうまくもとの情報に直すようだ。詳しくは情報工学の資料をあたってほしい。