整級数展開

まとめ

Maclaurin 展開

$$f_{(x)} = \quad f_{(0)} \quad + \frac{1}{1!} f'_{(0)} x \quad + \frac{1}{2!} f''_{(0)} x^2 \quad + \frac{1}{3!} f'''_{(0)} x^3 \quad + \quad \cdots$$

Taylor 展開

$$f_{(x_0+h)} = \quad f_{(x_0)} \quad + \frac{1}{1!} f'_{(x_0)} h \quad + \frac{1}{2!} f''_{(x_0)} h^2 \quad + \frac{1}{3!} f'''_{(x_0)} h^3 \quad + \quad \cdots$$

Maclaurin 展開から得られる公式

① $e^{ix} = \cos x + \sin x$ （Euler の公式）

② $(1 + x)^k = 1 + kx$ （x<<1 の時のみ）

Maclaurin 展開

$f_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ の a,b,c,d を求める一般式を事を求めたい。まずは準備として f の三階微分までを用意してみよう。

$$
\begin{aligned}
f_{(x)} &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f'_{(x)} &= 3ax^2 + 2bx + c \\
f''_{(x)} &= 3 \cdot 2ax + 2 \cdot 1b \\
f'''_{(x)} &= 3 \cdot 2 \cdot 1a
\end{aligned}
$$

ここから係数を求めることができる。

$$
\begin{cases}
a = \dfrac{1}{3!} f'''_{(0)} \\
b = \dfrac{1}{2!} f''_{(0)} \\
c = \dfrac{1}{3!} f'_{(0)} \\
d = f_{(0)}
\end{cases}
$$

この議論を拡張すれば、係数の一般式を推測することができる。 x^n の係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}_{(0)}$$

以上より関数 $f_{(x)}$ は以下の様に書けることになる。

$$
\begin{aligned}
f_{(x)} &= a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots \\
&= f_{(0)} + \frac{1}{1!} f'_{(0)} x + \frac{1}{2!} f''_{(0)} x^2 + \frac{1}{3!} f'''_{(0)} x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

これをマクローリン展開と呼ぶ。

今までの議論からは $f_{(x)} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$ の様なベキ級数がマクローリン展開で表せるとしか言えないが、ベキ級数以外のもの(例えば三角関数)はこれで表せるのだろうか？これを検討するために、一見関係ないようだが、微分の定義を思い出してみよう。

微分の定義 $f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$

$$hf'_{(x)} = f_{(x+h)} - f_{(x)}$$

$$f_{(x+h)} = f_{(x)} + f'_{(x)} h$$

ここで x=0 を代入してみる。

$$f_{(h)} = f_{(0)} + f'_{(0)} h$$

これはマクローリン展開の一項目と二項目である(ただし微分の定義より h→0 の時のみ)。この式は微分の定義を変形しただけのものなので、微分と同じ精度である。よって x が非常に小さいときはベキ級数でなくてもマクローリン（の一項目と二項目）に展開できるといえる。

一般的な関数 $f_{(x)}$ は $x \to 0$ の時に

$$f_{(x)} = f_{(0)} + \frac{1}{1!} f'_{(0)} x$$

これは以下の様に考えられないだろうか。ベキ級数に限らない一般的な関数 $f_{(x)}$ もマクローリン級数で展開できるのだが、$x \to 0$ の条件を課したため x^2 以降が非常に小さくなって消滅してしまった、つまり

$$f_{(x)} = f_{(0)} + \frac{1}{1!} f'_{(0)} x + \frac{1}{2!} f''_{(0)} x^2 + \frac{1}{3!} f'''_{(0)} x^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad f_{(0)} + \frac{1}{1!} f'_{(0)} x \qquad (x \to 0)$$

ということである。

以上より、いかなる関数もマクローリン級数に展開できると推測できる。（厳密な証明は名著と言われているような教科書を参照してください。ここでは学部一年の人がとっつきやすい説明を考えてみました。）

[Q1]　$f_{(x)} = x^3 + x^2 + x + 1$ をマクローリン展開せよ。

まずは準備として　$f_{(0)}$　$f'_{(0)}$　$f''_{(0)}$　$f'''_{(0)}$　・・・　を求める。

$$\begin{cases} f_{(x)} = x^3 + x^2 + x + 1 \\ f'_{(x)} = 3x^2 + 2x + 1 \\ f''_{(x)} = 6x + 2 \\ f'''_{(x)} = 6 \\ f''''_{(x)} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{(0)} = 1 \\ f'_{(0)} = 1 \\ f''_{(0)} = 2 \\ f'''_{(0)} = 6 \\ f''''_{(0)} = 0 \end{cases}$$

これらをマクロ-リン展開の表式に代入して

$$\begin{aligned} f_{(x)} &= f_{(0)} + \frac{1}{1!} f'_{(0)} x + \frac{1}{2!} f''_{(0)} x^2 + \frac{1}{3!} f'''_{(0)} x^3 + \cdots \\ &= (1) + \frac{1}{1!}(1)x + \frac{1}{2!}(2)x^2 + \frac{1}{3!}(6)x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 \\ &= x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

※　公式の確認。

[Q2]　sinx , cosx ,　e^{ix} をマクローリン展開せよ。

$$
\begin{aligned}
\sin x &= f_{(0)} \quad + \frac{1}{1!} f'_{(0)} x \quad + \frac{1}{2!} f''_{(0)} x^2 \quad + \frac{1}{3!} f'''_{(0)} x^3 \quad + \cdots \\
&= (\sin 0) \quad + \frac{1}{1!} (\cos 0) x \quad + \frac{1}{2!} (-\sin 0) x^2 \quad + \frac{1}{3!} (-\cos 0) x^3 \quad + \cdots \\
&= 0 \quad + \frac{1}{1!} (+1) x \quad + \frac{1}{2!} (0) x^2 \quad + \frac{1}{3!} (-1) x^3 \quad + \cdots \\
&= \frac{1}{1!} x \quad - \frac{1}{3!} x^3 \quad + \frac{1}{5!} x^5 \quad - \frac{1}{7!} x^7 \quad + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos x &= f_{(0)} \quad + \frac{1}{1!} f'_{(0)} x \quad + \frac{1}{2!} f''_{(0)} x^2 \quad + \frac{1}{3!} f'''_{(0)} x^3 \quad + \cdots \\
&= (\cos 0) \quad + \frac{1}{1!} (-\sin 0) x \quad + \frac{1}{2!} (-\cos 0) x^2 \quad + \frac{1}{3!} (\sin 0) x^3 \quad + \cdots \\
&= 1 \quad + \frac{1}{1!} (0) x \quad + \frac{1}{2!} (-1) x^2 \quad + \frac{1}{3!} (0) x^3 \quad + \cdots \\
&= x \quad - \frac{1}{2!} x^2 \quad + \frac{1}{4!} x^4 \quad - \frac{1}{6!} x^6 \quad + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= f_{(0)} \quad + \frac{1}{1!} f'_{(0)} x \quad + \frac{1}{2!} f''_{(0)} x^2 \quad + \frac{1}{3!} f'''_{(0)} x^3 \quad + \cdots \\
&= (e^{i \cdot 0}) \quad + \frac{1}{1!} (ie^{i \cdot 0}) x \quad + \frac{1}{2!} (-e^{i \cdot 0}) x^2 \quad + \frac{1}{3!} (-ie^{i \cdot 0}) x^3 \quad + \cdots \\
&= 1 \quad + \frac{1}{1!} ix \quad - \frac{1}{2!} x^2 \quad - \frac{1}{3!} ix^3 \quad + \frac{1}{4!} x^4 \quad + \frac{1}{5!} ix^5 \quad + \cdots \\
&= (1 \quad - \frac{1}{2!} x^2 \quad + \frac{1}{4!} x^4 \quad \cdots) \quad + \quad i(+\frac{1}{1!} x \quad - \frac{1}{3!} ix^3 \quad + \frac{1}{5!} ix^5 \quad \cdots) \\
&= \cos x \quad + i \sin x
\end{aligned}
$$

※　$e^{ix} = \cos x + i \sin x$　はオイラーの公式と呼ばれている。

[Q3]　$(1+x)^k$ をマクローリン展開せよ。

$$\begin{aligned}(1+x)^k &= f_{(0)} + \frac{1}{1!}f'_{(0)}x + \frac{1}{2!}f''_{(0)}x^2 + \frac{1}{3!}f'''_{(0)}x^3 + \cdots \\ &= (1+0)^k + \frac{1}{1!}k(1+0)^{k-1}x + \frac{1}{2!}k(k-1)(1+0)^{k-2}x^2 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1!}kx + \frac{1}{2!}k(k-1)x^2 + \frac{1}{3!}k(k-1)(k-2)x^3 + \cdots\end{aligned}$$

[Q4]　$\sqrt{(n+1)}$　$(n >> 1)$ をマクローリン展開せよ。

$$\sqrt{(n+1)} = n^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{n} = x$ として展開してゆくのだが、n>>1 より 1>>x なので x^2 以降の項は無視する。

$$\begin{aligned} &= \sqrt{n}\cdot f_{(x)} \\ &= \sqrt{n}\cdot\left((f_{(0)} + \frac{1}{1!}f'_{(0)}x \right) \\ &= \sqrt{n}\cdot\left((1+0)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2}(1+0)^{-\frac{1}{2}}x \right) \\ &= \sqrt{n}\cdot\left(1+\frac{1}{2}x\right) \\ &= \sqrt{n}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

※　公式：x<<1 の時　$(1+x)^k \approx (1+kx)$

[Q5] $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-e^x}\right)$ の振る舞いを調べよ。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-e^x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{-x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3-\cdots)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{-1-\frac{1}{2!}x-\frac{1}{3!}x^2-\cdots)}\right) \\
&= \frac{1}{-1} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

この計算が示すところは $\frac{x}{1-e^x}$ のグラフは複雑なために推測できないが、x=0 付近の様子だけは近似的に知ることができるということである。（このグラフは x が 0 に近づくにつれ値が -1 になっていく。）

[Q6] $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\right)$の振る舞いを調べよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\right) = \lim_{\frac{1}{x}\to 0}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\right)$$

$$=\lim_{\frac{1}{x}\to 0}\left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\cdots\right)-1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)\right)-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \quad x$$

この関数は x が∞に近づくにつれ y = x グラフに漸近する。

Taylor 展開

４ページにおいて、一般関数のマクローリン展開を考えた時に以下の様な操作を行った。

微分の定義　$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$

$$hf'_{(x)} = f_{(x+h)} - f_{(x)}$$

$$f_{(x+h)} = f_{(x)} + f'_{(x)}h$$

ここで x=0 を代入してみる。

$$f_{(h)} = f_{(0)} + f'_{(0)}h$$

ベキ級数のマクローリン展開と合わせる為に x=0 を代入したが、何も x=0 である必要は無い。$x = x_0$ を代入すると。

$$f_{(x_0+h)} = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}h$$

となり、マクローリン展開は以下の様に拡張される。

$$f_{(x_0+h)} = f_{(x_0)} + \frac{1}{1!} f'_{(x_0)}h + \frac{1}{2!} f''_{(x_0)}h^2 + \frac{1}{3!} f'''_{(x_0)}h^3 + \cdots$$

これをテーラー展開と呼ぶ。

もっと直感的に説明するならこういうことなる。

マクローリン展開には x=0 と x=h の関係が現れる。

$$f_{(h)} = f_{(0)} + \frac{1}{1!} f'_{(0)} h + \frac{1}{2!} f''_{(0)} h^2 + \frac{1}{3!} f'''_{(0)} h^3 + \cdots$$

これを以下の様に見てみると

$$f_{(0+h)} = f_{(0)} + \frac{1}{1!} f'_{(0)} h + \frac{1}{2!} f''_{(0)} h^2 + \frac{1}{3!} f'''_{(0)} h^3 + \cdots$$

それは

$$f_{(x_0+h)} = f_{(x_0)} + \frac{1}{1!} f'_{(x_0)} h + \frac{1}{2!} f''_{(x_0)} h^2 + \frac{1}{3!} f'''_{(x_0)} h^3 + \cdots$$

の x_0 =0 バージョンだったと考えられるだろう。

つまりマクローリン展開はテイラー展開に含まれる。

[Q7] ポテンシャル $V_{(x,y)}$ の(a,b)での振る舞いを調べよ。

V は x , y 二つを変数に持つ関数なので、２変数のテーラー展開を行う必要がある。先に x について展開し、それをさらに y について展開する・・・という順番でやってみる。

$$V_{(x,y)} = V_{(x,y)}\Big|_{x=a} + \frac{\partial V_{(x,y)}}{\partial x}\bigg|_{x=a} x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x^2}\bigg|_{x=a} x^2 + \cdots$$

$$\begin{aligned} &= V_{(x,y)}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} + \frac{\partial V_{(x,y)}}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} y + \frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial y^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} y^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\partial V_{(x,y)}}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} x + \frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x \partial y}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} xy \quad \frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial^3 V_{(x,y)}}{\partial x \partial y^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} xy^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} x^2 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} x^2 y + \frac{1}{2!}\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} x^2 y^2 + \cdots \end{aligned}$$

昇べキの順に並べると

$$\begin{aligned} V_{(x,y)} = &\; V_{(a,b)} + \frac{\partial V_{(x,y)}}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} x + \frac{\partial V_{(x,y)}}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} y + \frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial y^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} x^2 \\ &+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} y^2 + \frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x \partial y}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} x^2 y + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 V_{(x,y)}}{\partial x \partial y^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} xy^2 \\ &+ \frac{1}{4}\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=a\\y=b}} x^2 y^2 + \cdots \end{aligned}$$

$V_{(x,y)}$ が複雑な関数形であっても、(a,b)の周りでは上記のように表現できる。

(a,b)付近の非常に狭い領域なら $x \to 0$, $y \to 0$ となり、最初の３項しか残らない。
(a,b)付近の広い領域を得ようとすると、多くの項が残り、かえって不便になる。

Takashi Inoue
http://www.persianblue.net