【９．変分法】

この項では変分法について説明する。解析力学でよく目にすることになるが、物理学全般において現われる基本的な概念である。変分法の大体の精神を学び、例題を通しどのように扱われているのか見ていくことにする。

・変分原理

・変分法で扱う問題

まず変分法で扱われる問題について述べておく。変分法では極値問題が主に扱われる。
しかしながら極値問題では正確ではない。極値を与える関数を求める問題を扱うのである。
“ 値 ” と “ 関数 ” ではやはり考え方が異なる。極値は関数に対し条件を課して決定されたが、関数では簡単にはいかない。関数を与える関数を考える必要が出てくる。この関数を汎関数(はんかんすう)と呼ぶ。例えば

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dxF\ (y, y', y'', \cdots ; x)$$

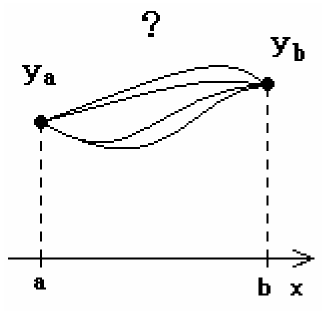
で説明すると x は独立変数であり、 $y, y', y'', \cdots$ は x の関数である。I は $x_1 \sim x_2$ の積分範囲で積分すると定積分の値として決定されるが、この値は y, y', y'', の関数の形によるのである。したがって I は y の汎関数と呼ぶ事になる。
問題としては y の形を決定することであるがどうすればよいのか？そこに変分原理という概念が考え出された。

・変分原理と Euler の方程式

右図のように関数空間の中で区間[a,b]で表される汎関数 I が

$$I = \int_a^b dxF\ (y, y', y'', \cdots ; x)$$

と表され、極値を持つとき y の形がどのようなものか考えてみる。



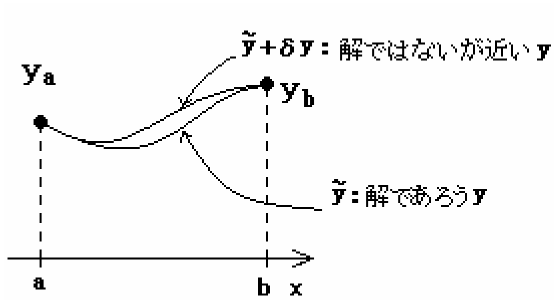
今、端点 a,b において関数形が y_a y_b と決定されているとする。これは物理の問題で言うと初期状態と終状態が決定されている事にあたる。とても自然な事であるが、数学的にはあまり好ましくないかもしれない。物理で扱うので特に問題はないだろう。
区間[a,b]の関数形はどのようなものか決定するための Euler の方程式を導いてみる。

まず汎関数 I が $y=\tilde{y}$ の関数形のとき、目的の停留値を取ったと仮定する。
そこから少し関数形をずらした関数を考える。それを $y=\tilde{y}+\delta y$ と書く。δy を関数のズレ、変分と言う。このとき変分はただ上下にずれている訳ではなく、一般に n 次元関数空間で δy ずれているので「$\tilde{y}$ の周りに δy の変分を考える」という。

それぞれの y での I を考え、差を考えてやると

$$I[\tilde{y}+\delta y]-I[\tilde{y}]=\delta I$$

である。
ここで $\delta I=0$ となるような $y=\tilde{y}$ を探す事で目的の y を決定できる。



さて実際のこの計算をやってみよう。

$$I=\int_a^b dxF\,(y,y',y'',\cdots;x)$$

$$I[\tilde{y}+\delta y]-I[\tilde{y}]=\int_a^b\left\{F\,(\tilde{y}+\delta y,\tilde{y}'+\delta y',\tilde{y}''+\delta y'',\cdots;x)-F\,(\tilde{y},\tilde{y}',\tilde{y}'',\cdots;x)\right\}dx$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}\delta y+\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\delta y'+\cdots\right)dx$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}\delta y+\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\frac{d}{dx}\delta y+\cdots\right)dx$$ 部分積分を行うと

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}\delta y-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\delta y+\cdots\right)dx+\left[\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\delta y\right]_a^b$$

となるが、初めに条件として端点で関数形が決定していると課したのでズレはないから、端点での変分は $\delta y_a=0,\delta y_b=0$ である。また(※1)三次以降を微小として無視すると

$$\therefore\quad \delta I=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\right)dx\delta y$$ 一般の F に対し $\delta I=0$ であるためには

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$ を満たせばよい。

この関係式を(※2)Euler－Lagrange 方程式という。

(※1)式の展開で三次以降を無視しているが別に無視をしなくてもよい。ただ三次以降の項を必要とする物理現象があまりないだけである。

(※2)Euler‐Lagrange 方程式(以下 E‐L‐eq.と略記する)
名前の通り Euler と Lagrange により作られた方程式であるが、Euler は一般の数学式に対し考えられたもので、Lagrange は解析力学の経緯で最小作用の原理より方程式を導いた。いわゆる Lagrange 方程式のＦ は Lagrangian と呼ばれる量で書かれる。
Lagrangian Ｌは運動エネルギーＴと Potential エネルギーＶの差で定義される量で、
$L \equiv T - V$ である。この定義は解析力学で力学量の議論が必要である。
Lagrange 方程式では最小作用の原理が用いられ、Euler の方程式では変分原理が用いられたと区別できるかもしれない。どちらも原理と称している通り何故そうなるのかは様々な意見がありよく分からない。感覚的には身の周りに起きている現象は確かにこの原理に則しているが、それが何故正しいと言えるのか難しいところである。

独立変数が必ずしも一つとは限らない、むしろ多変数である事の方が自然である。

・二変数の場合
先ほどと同様にして考える。

$$I = \int_A^B dxdtF\,(y, y_x, y_t, \cdots; x, t) \qquad y = y(x,t) \qquad y_x \equiv \frac{\partial y}{\partial x}\ y_t \equiv \frac{\partial y}{\partial t} \qquad \delta y(A) = 0\ \delta y(B) = 0$$

$$\delta I = \int_A^B \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y_x}\delta y_x + \frac{\partial F}{\partial y_t}\delta y_t + \cdots \right) dxdt$$

$$= \int_A^B \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y_t} + \cdots \right) \delta y dxdt$$

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y_t} = 0$$ を満たせばよい。

今まで扱ってきたＦ の引数の陰と陽については何も述べていない。場合によっては引数が具体的にＦ に含まれないことがある。これを陽に依存しない引数があるという。この場合少し E‐L‐eq.を変形できる。

・陽に引数が依存しない場合

まず扱う関数として

$F = F(y, y'; x)$　　　　とし、問題として E－L－eq.を考えるとする。

一般に F が x を陽に引数とするとき、

$$\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0 \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0 \quad \frac{dF}{dx} \neq 0 \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$$

の関係がわかり、E－L－eq.を変える必要はない。

次に F が x を陽に引数としないときは、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \frac{dF}{dx} \neq 0 \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$$

の関係が現れてくるのである。これを利用し E－L－eq.をいじってみよう。

まず普通に微分して

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

E－L－eq.より

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$$

であるから、

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right\} \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left\{y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right\} = 0$$

となる。

ここで注意すべきは、微分記号 $\frac{d}{dx}$ である。偏微分とは異なり、その独立変数を含むすべての関数を微分操作を行う意味を持つ記号なのである。それを注意するとこの上の式は一度だけ積分をすることが出来て、

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left\{y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right\} = 0 \quad \rightarrow \quad F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

という関係式が導かれる。

さて長々と説明を続けてきたが、今まで直交座標、デカルト座標で話を進めてきたが座標は問題に対応して一般化座標を導入してかまわない。また、変分法を学ぶためには原理を知っているだけでは到底、使い物にならない。であるから様々な変分問題を解き、手法を習得してもらいたい。

次に例題を挙げていく。

・単振り子(Lagrange 未定定数法)

なぜ単振り子が変分法の例題になるのか不思議だと思うかもしれない。先に解析力学にて変分法が扱われると述べていた。解析力学を勉強していただければ分かると思うが、少し説明をしておと運動方程式が E－L－eq.から現れるのである。最小作用の原理とは「質点系が $t_1 \sim t_2$ 各々の位置へ移動する際に束縛条件を崩さないような運動が多数存在するが、その中で Lagrangian を同時間区間 $[t_1, t_2]$ で積分(作用積分)の値が停留値をとるような運動軌道が実際に現れる運動である。」

式で書くと

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dtL\,(x, y, z, x', y', z', \cdots; t)$$

が停留値を与えるような L が運動を決める。L を決めるには E－L－eq.つまり、

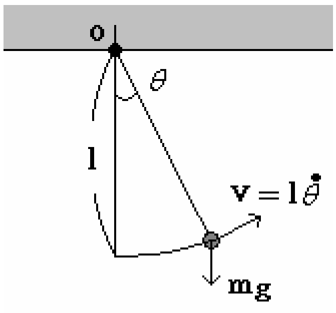
$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z'} = 0 \quad (\delta x, \delta y, \delta z \text{ について考える為})$$

を満たす L を見つければよい。

これが運動方程式を与えるかどうか簡単な例として単振り子を見てみよう。

・単振り子(運動方程式と E－L－eq.)

右図のような単振り子を考える。極座標表現で考える。



まずは普通に単振り子の運動方程式を立ててみる。

θ 方向： $m \cdot l\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

r 方向： $0 = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 - S$

である。

Lagrangian の定義通りに運動エネルギーと Potential エネルギーの差として定義し、E－L－eq.を見てみよう。

運動エネルギーT は、

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2$$

Potential エネルギーV は今、O を基準としているので

$$V = -mgl\cos\theta$$

Lgragian L は $L \equiv T - V$ より

$$L \equiv T - V = \frac{m}{2}\left(l\dot{\theta}\right)^2 - \left(-mgl\cos\theta\right) = \frac{m}{2}\left(l\dot{\theta}\right)^2 + mgl\cos\theta$$

である。

E‐L‐eq.は

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=-mgl\sin\theta-\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right)$$

$$=-mgl\sin\theta-ml^2\ddot{\theta}=0$$

となる。

これはまさに先に立てた運動方程式である。

運動方程式は E‐L‐eq.より現れる事が分かって頂けたと思う。Lagrangian を用い考えた運動方程式は全て本質的に変分法の問題であるのだ。しかしながら上の式は不十分であるように感じる。上の式は確かにθ方向を表しているが、r 方向については何も教えてくれないからである。そこで拘束付きの Lagrange 方程式を解いてみる。

この方法を Lagrange 未定定数法という。

・単振り子(Lagrange 未定定数法)

一般化座標(r,θ)として問題を解く。先の問題では初めから$r=l=\text{const.}$と伸びない糸として考えていた。一般的に考えると糸は伸縮するかもしれないので動径方向があるとして Lagrangian は

$$L=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{m}{2}\left(r\dot{\theta}\right)^2+mgr\cos\theta$$ と表すことが出来る。

ここで糸が伸縮しない拘束条件φを決めておく。

$$\varphi=r-l=0$$

新たに条件付 Lagragian $\tilde{L}$ を

$$\tilde{L}\equiv L+\lambda\varphi=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{m}{2}\left(r\dot{\theta}\right)^2+mgr\cos\theta+\lambda(r-l)$$ λ：Lagrange 未定定数

と置き、E‐L‐eq. $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}}=0$ $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}}=0$ を解く。

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}}=mr\dot{\theta}^2+mg\cos\theta+\lambda-m\ddot{r}=0$$

$\varphi=r-l=0$ より $r=l=\text{const.}$ $\therefore \ddot{r}=0$

$\therefore \lambda=-mg\cos\theta-ml\dot{\theta}^2$ ← これは張力を表している。

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}}=-mgr\sin\theta-\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0$$

$\varphi=r-l=0$ より $r=l=\text{const.}$

$\therefore -mgl\sin\theta-ml^2\ddot{\theta}=0$ ← これは運動方程式を表している。

Lagrange 未定定数λを用いると拘束条件を考えた運動を考えることが出来るのである。

他にも例題を見ていこう。

・Schrodinger 方程式

Schrodinger 方程式が変分法を満足するか確かめてみる。

$\Psi(r), \Psi^*(r)$ の汎関数 $E\left(\Psi, \Psi^*\right)$

$$E\left(\Psi, \Psi^*\right) = \frac{\int d\tau \Psi^* \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right\}\Psi}{\int d\tau \Psi^* \Psi}$$

に変分原理を適用し Schrodinger 方程式

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right\}\Psi = E\Psi \quad , \quad \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right\}\Psi^* = E\Psi^*$$

が成立することを示せ。但し Ψ は $r \to \infty$ にて速やかに収束するとする。

(解)

まず式の展開として

$$\Psi^* \nabla^2 \Psi = \nabla \cdot \left(\Psi^* \nabla \Psi\right) - \nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi$$

$$\int d\tau \Psi^* \nabla^2 \Psi = \int d\tau \left\{\nabla \cdot \left(\Psi^* \nabla \Psi\right) - \nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi\right\}$$

ガウスの法則より

$$= \int d\bar{s} \cdot \left(\Psi^* \nabla \Psi\right) - \int d\tau \left(\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi\right)$$

Ψ は $r \to \infty$ で速やかに収束するので

$$= -\int d\tau \left(\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi\right)$$

の関係が分かる。

これはつまり $\Psi^* \nabla^2 \Psi$ は $\int d\tau$ の中で $-\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi$ として扱ってもよいということである。

次に $H \equiv \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right\}$, $f \equiv \int d\tau \Psi^* H \Psi$, $g \equiv \left(\int d\tau \Psi^* \Psi\right)^{-1}$ として

$E\left(\Psi, \Psi^*\right)$ の変分 δE を考えると

$$\delta E = \delta\left(f \cdot g\right)$$

$$= \delta f \cdot g + f \cdot \delta g = \frac{\delta \int d\tau \Psi^* H \Psi}{\int d\tau \Psi^* \Psi} + \int d\tau \Psi^* H \Psi \left\{-\frac{\delta \int d\tau \Psi^* \Psi}{\left(\int d\tau \Psi^* \Psi\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{\delta \int d\tau \Psi^* H \Psi - E\delta \int d\tau \Psi^* \Psi}{\int d\tau \Psi^* \Psi} \equiv \frac{\delta \int d\tau \cdot F}{\int d\tau \Psi^* \Psi} = \frac{\int d\tau \cdot \delta F}{\int d\tau \Psi^* \Psi}$$

但し $F \equiv \Psi^* H \Psi - E\Psi^* \Psi$

と変形できる。ここで F についての変分 δF を考えると

$$\delta F = \frac{\hbar^2}{2m}\left\{\left(\delta\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi\right) + \left(\nabla\Psi^* \cdot \delta\nabla\Psi\right)\right\} + (V - E)\left(\delta\Psi^*\Psi + \Psi^*\delta\Psi\right)$$

となりさらに

$$\delta\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi = \nabla\delta\Psi^* \cdot \nabla\Psi = \nabla\left(\delta\Psi^* \cdot \nabla\Psi\right) - \delta\Psi^* \cdot \nabla^2\Psi$$

と出来るから、先の計算と同様$\int d\tau$の中で

$\delta\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi$を$-\delta\Psi^* \cdot \nabla^2\Psi$としてよいから$\delta\Psi^*, \delta\Psi$それぞれで式をまとめると

$$\int d\tau \cdot \delta F = \int d\tau\left[\left\{(V - E)\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi\right\}\delta\Psi^* + \left\{(V - E)\Psi^* - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*\right\}\delta\Psi\right] = 0$$

を満たせばよいことが分かる。

任意の$\delta\Psi^*, \delta\Psi$にて上式が成立するには題意の Schrodinger 方程式を満たせばよい。

・等周囲問題

等周囲問題とは周囲の採るべき極値が決まっていてそれを満たす軌道は何か？という問題であり、意味は変分法そのものである。運動方程式では現さない物理現象に適用される、変分法を例題として挙げる。

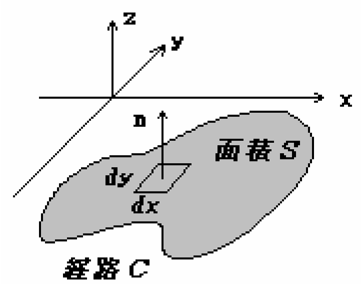
・等周囲問題

x, y 平面上に長さ一定の閉曲線を作ったとする。囲まれた面積が最大となる閉曲線の軌道が円であることを証明せよ。

(解)

右図の様に x, y 平面上に閉曲線を考えると、面積 S は

$$S = \iint_{C} dxdy$$



また拘束として経路 C の長さ、線積分が

$$\oint_{C} dl = \text{const.} \equiv l$$

とできる。

Stokes の定理より

$$S = \iint_{C} dxdy = \frac{1}{2}\oint_{C} dl(xdy - ydx)$$ となり、

また dl は

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \equiv \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$ と出来るから

変数を x でとり、Lagrange 未定定数 λ を用いて汎関数 $\tilde{S}$ を

$$\tilde{S} = S + \lambda \oint_C dl$$ とすると、

$$\tilde{S} = \oint_C dx \left\{ \frac{1}{2}(xy' - y) + \lambda \left(1 + y'^2\right)^{1/2} \right\} \equiv \oint_C dx F(y, y'; x)$$ と出来るので

この F に対し E‐L‐eq.を考えてやると

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = -1$$ 一回 x で積分して

$$\rightarrow \quad \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -x + \alpha$$ α：未定定数　　これを変形してやると

$$\rightarrow \quad y' = \pm \frac{x - \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - (x - \alpha)^2}}$$ さらに一回 x で積分して

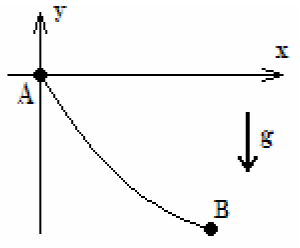
$$\rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\lambda^2 - (x - \alpha)^2} + \beta \qquad \therefore (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \lambda^2$$ β：未定定数

となるからこれは (α, β) を中心とし半径 λ の円を表している。
また拘束条件より λ は

$$l = 2\pi\lambda \qquad \therefore \lambda = \frac{l}{2\pi}$$ と決定される。

この問題は E‐L‐eq.を用いて停留値の条件と束縛条件を満たす軌道を見つける問題で、運動方程式を解くような問題ではない。変分法は様々な場所で現れる。
さてこの問題に似たような例題をいくつか挙げることにしよう。

・最速降下曲線



右図のように
Ａから B へ質量 m の質点が移動したとする。
この空間には重力があるとする。
このとき到達時間がもっとも短くなる経路を示せ。
ただし重力加速度を g とする。

(解)
条件より到達時間は

$$t_{A\to B}=\int_A^B \frac{ds}{v(s)} \qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

と書ける。
全力学的エネルギーを A にて 0 とすると

$$0=\frac{1}{2}mv^2-mgy \qquad \to \qquad v=\sqrt{2g}\cdot y^{1/2}$$

よって

$$t_{A\to B}=\int_A^B \frac{ds}{v(s)}=\int_0^{x_B}\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

ここで $F\equiv\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}$ と置くと F は陽に x を含まないので E - L - eq.は

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=\text{const.}$$ を考えればよいから

$$\Rightarrow y'\frac{y'}{\sqrt{y'(1+y'^2)}}-\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}=\frac{1}{\sqrt{y'(1+y'^2)}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{y'(1+y'^2)}=\text{const.}\equiv C$$

ひとまず $y'=\tan\theta$ とすると

$$y=\frac{C}{1+y'^2}=C\cos^2\theta=\frac{C}{2}(1+\cos 2\theta) \qquad \frac{dx}{d\theta}=\frac{\partial x}{\partial y}\frac{dy}{d\theta}$$ より x を考えると

$$\frac{dx}{d\theta}=C\cot\theta(-\sin 2\theta)$$ となり　負が出てくるので $y'=\cot\theta$ と置くことにする

$y' = \cot\theta$ より

$$y = \frac{C}{1+y'^2} = C\sin^2\theta = \frac{C}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} = C\tan\theta(\sin 2\theta) = C\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\right) = C(1-\cos 2\theta)$$

これをθで一度積分して

$$x = \frac{C}{2}(2\theta - \sin 2\theta)$$ と出来る。

以上より求める軌跡は

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{2}(2\theta - \sin 2\theta) \\ y = \dfrac{C}{2}(1-\cos 2\theta) \end{cases}$$ となり軌跡は Cycloid(サイクロイド)を描く。

この例題は「F が陽に x を含まない」ところが Point である。

・Fermat(フェルマー)の原理を用いた Snell(スネル)の法則

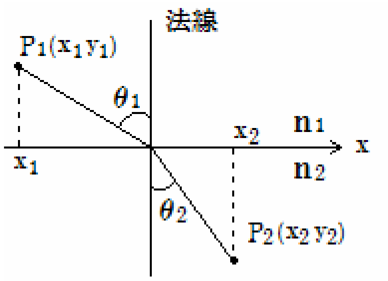
Fermat の原理に寄れば光はその伝播時間を最小にする経路を選択するという。

今一様な屈折率を持つ媒質が平面を境にして接しているとする。屈折率はn_1, n_2であり、光はn_1の媒質中の点P_1からn_2における点P_2へ到達したとする。

このとき

入射角θ_1、屈折角θ_2を用いた Snell の法則

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{or} \quad n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$



の関係を示せ。

(解)

Fermat の原理より

$$t = \int_{P_1}^{P_2}\frac{n(s)ds}{c}$$ c：光速 を最小にすることを用いる。

図のように点P_1とP_2の座標を決めてやると

$$t = \int_{P_1}^{P_2}\frac{n(s)ds}{c} = \frac{1}{c}\left\{n_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + n_2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right\}$$ である。

実はこの物理系には拘束がある。それは境界を x 軸上にあるとしたことである。また定点間の光路を考えているので拘束は

$$x_1 + x_2 = \mathrm{const.} \equiv l \qquad \varphi \equiv x_1 + x_2 - l = 0 \quad \leftarrow \text{拘束}$$

を考えるのである。Lagrange 未定定数λを導入し汎関数t を書き換える。

$$\tilde{t} \equiv t + \lambda\varphi$$

としてこの変分$\delta\tilde{t} = 0$を考える。

$$\delta\tilde{t} = \frac{\partial\tilde{t}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\tilde{t}}{\partial x_2}\delta x_2 = 0$$

これを変分$\delta x_1, \delta x_2$の値に関係なく満足するには

$$\frac{\partial\tilde{t}}{\partial x_1} = 0 \quad \& \quad \frac{\partial\tilde{t}}{\partial x_2} = 0$$

を満たさねばならない。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{t}}{\partial x_1} = \dfrac{n_1}{c}\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\tilde{t}}{\partial x_2} = \dfrac{n_2}{c}\dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \lambda = 0 \end{cases}$$

λを消去してやると

$$\frac{n_1 x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{n_2 x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

となる。

ここで入射角θ_1、屈折角θ_2の座標関係を考えてやれば

Snell の法則

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

が現われる。

この例題の Point は

「必ずしも変分法の問題が E‐L‐eq.を解く問題ではない」と言う事である。

さていくつかの例題を見てきたが最も重要なことは何の変分を考えているか？である。
単に E‐L‐eq.を解くだけの問題ではない。言い換えれば、変分に関わってくる変数に気が付く事、考える物理系の拘束条件に気が付く事、と基本的な物理的思考の姿勢なのである。